常用分布

司继春

[1]上海对外经贸大学

2024年9月

概览

1. 离散型随机变量
2. 连续型随机变量
3. 随机变量的变换
4. 分布族
5. 单参数指数分布族

伯努利分布

伯努利分布即伯努利试验（Bernoulli trial）的结果。伯努利试验即试验结果只有两种可能性（成功，失败），定义为$X = 1\ if$ 成功，$= 0\ if$ 失败。如果成功的概率为p，那么**伯努利分布（Bernoulli distribution）**$X \sim \mathrm{Ber}(p)$即

$$X = \begin{cases} 1 & with\ probability\ p \\ 0 & with\ probability\ 1-p \end{cases} \quad 0 \leq p \leq 1$$

- 期望：$\mathbb{E}(X) = p$
- 方差：$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
- 矩母函数：$1 - p + pe^t$

二项分布

二项分布即独立重复N次伯努利实验，成功次数$Y=\sum_{i=1}^{N}X_i, X_i\sim \mathrm{Ber}\left(p\right)$的分布。简单计算可以得到，随机变量$Y$的概率质量函数：

$$P\left(Y=y|N,p\right)=\begin{pmatrix} N \\ y \end{pmatrix} p^y\left(1-p\right)^{N-y}, y=1,2,...,N$$

我们成Y服从二项分布（**binomial distribution**），记为$Y\sim \mathrm{Bi}\left(N,p\right)$。

- 期望：$\mathbb{E}\left(Y\right)=Np$
- 方差：$\mathbb{V}\left(Y\right)=Np\left(1-p\right)$
- 矩母函数：$\left(1-p+pe^t\right)^N$

负二项分布

负二项分布（negative binomial distribution）用于建模为了达到r次成功所需要的试验次数，如果记为Z，那么

$$
\begin{aligned}
P(Z=z|r,p) &= \binom{z-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{z-r}\cdot p \\
&= \binom{z-1}{r-1} p^{r}(1-p)^{z-r}, z=r,r+1,\dots
\end{aligned}
$$

记为$Z\sim \mathrm{NB}(r,p)$。

- 期望：$\mathbb{E}(Z)=\frac{r}{p}$
- 方差：$\mathbb{V}(Z)=\frac{r(1-p)}{p^2}$
- 矩母函数：$\left(\frac{p}{1-e^t+pe^t}\right)^r, t<-\ln(1-p)$

几何分布

- **几何分布（geometric distribution）**是最简单形式的负二项分布，如果一个随机变量$V \sim \mathrm{NB}(1, p)$，则随机变量V服从几何分布：

$$P(V = v|p) = p(1-p)^{v-1}$$

  我们记$V \sim \mathrm{G}(p)$。
- 几何分布具有无记忆性，即

$$P(V > s|V > t) = P(V > s - t), s > t$$

泊松分布

如果随机变量X的概率质量函数为

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}, x=0,1,2,\ldots$$

那么我们称随机变量X服从**泊松分布（Poisson distribution）**，记为$X\sim \mathrm{P}(\lambda)$。泊松分布经常被用来建模次数、个数等相关问题。

- 期望：$\mathbb{E}(X)=\lambda$
- 方差：$\mathbb{V}(X)=\lambda$
- 矩母函数：$e^{\lambda(e^t-1)}$

均匀分布

如果随机变量X在区间$[a,b]$内的概率密度函数为常数，即

$$f(x|a,b)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

则称随机变量X服从区间$[a,b]$上的**均匀分布（uniform distribution）**，记为$X\sim \mathrm{U}(a,b)$。

- 期望：$\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}$
- 方差：$\mathbb{V}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
- 矩母函数：$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$

指数分布

若随机变量X的概率密度函数为

$$f\left(x|a,\beta\right)=\mathbb{1}\left\{x>a\right\}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x-a}{\beta}}$$

那么我们称X服从**指数分布**（**exponential distribution**），记为$X\sim \mathrm{E}\left(a,\beta\right)$。

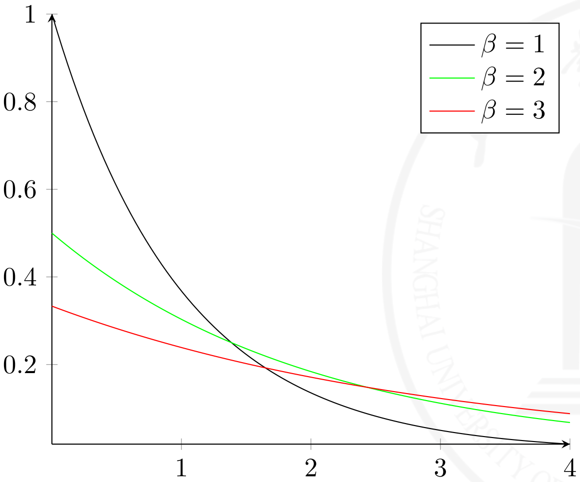
- 分布函数：$F\left(x\right)=\mathbb{1}\left\{x>a\right\}\left(1-e^{-\frac{x-a}{\beta}}\right)$
- 期望：$\mathbb{E}\left(X\right)=\beta+a$
- 方差：$\mathbb{V}\left(X\right)=\beta^2$
- 矩母函数：$\left(1-\beta t\right)^{-1}e^{at}$

指数分布

- 如果一个随机变量$Y \sim \mathrm{P}(\lambda)$，其中参数$\lambda$代表一段时间$T$内到达的平均次数，所以对于时间$t$内，平均到达的人数即$\lambda\frac{t}{T}$，因而在t时间内只有0次到达的概率为$e^{-\frac{\lambda t}{T}}$。
- 如果在时间t内有0次到达，意味着等待时间大于t，因而等待时间X大于t的概率$P(X > t) = e^{-\frac{\lambda t}{T}}$，所以$P(X \le t) = 1 - e^{-\frac{\lambda t}{T}}$，因而等待时间$X$服从指数分布，即$X \sim \mathrm{E}(0, \frac{T}{\lambda})$。
- 同样，指数分布也具有无记忆性，即如果令$\beta = \frac{T}{\lambda}$，那么$X \sim \mathrm{E}(0, \beta)$，那么

$$P(X > s | X > t) = P(X > s - t), s > t$$

指数分布



Beta分布

如果一个随机变量$X \in (0,1)$，且其分布函数为

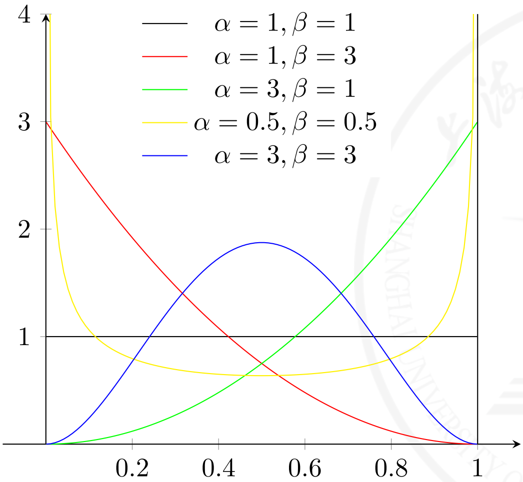
$$f(x|\alpha,\beta) = \mathbb{1}\{0<x<1\}\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \alpha>0, \beta>0$$

那么我们称X服从**beta分布（beta distribution）**，记为$X \sim \mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$。其中

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

- 期望：$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta+a}$
- 方差：$\mathbb{V}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

Beta分布


4
3
2
1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
$\alpha = 1, \beta = 1$
$\alpha = 1, \beta = 3$
$\alpha = 3, \beta = 1$
$\alpha = 0.5, \beta = 0.5$
$\alpha = 3, \beta = 3$

逻辑斯蒂分布

若随机变量X的分布函数为

$$F\left(x|\mu,\sigma\right)=\frac{e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}{1+e^{\frac{x-\mu}{\sigma}}}$$

那么我们称X服从**逻辑斯蒂分布（logistic distribution）**，其密度函数为：

$$f\left(x|\mu,\sigma\right)=\frac{1}{\sigma}\frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\left[1+e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right]^2}$$

记为：$X\sim\mathrm{LG}\left(\mu,\sigma\right)$。

- 期望：$\mathbb{E}\left(X\right)=\mu$
- 方差：$\mathbb{V}\left(X\right)=\sigma^2\frac{\pi^2}{3}$

正态分布

如果一个随机变量X潜在受到非常多的独立因素的影响，即$X = f_1 + f_2 + \cdots$，而每个f_i又不能单独对X有非常大的影响，那么一般来说X将会服从**正态分布（normal distribution）**或者**高斯分布（Gaussian distribution）**。正态分布的密度函数为

$$f\left(x|\mu,\sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

记为$X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$。

- 期望：$\mathbb{E}\left(X\right) = \mu$
- 方差：$\mathbb{V}\left(X\right) = \sigma^2$
- 矩母函数：$e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

正态分布

- 如果$X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$，如果令$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$，则$\mathbb{E}\left(Z\right) = \frac{\mathbb{E}(X)-\mu}{\sigma} = 0$，$\mathbb{V}\left(Z\right) = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \mathbb{V}\left(X\right) = 1$，随机变量$Z$服从$\mu = 0, \sigma = 1$的正态分布，即$Z \sim \mathrm{N}\left(0, 1\right)$，我们称之为**标准正态分布（standard normal distribution）**。
- 标准正态分布的密度函数为

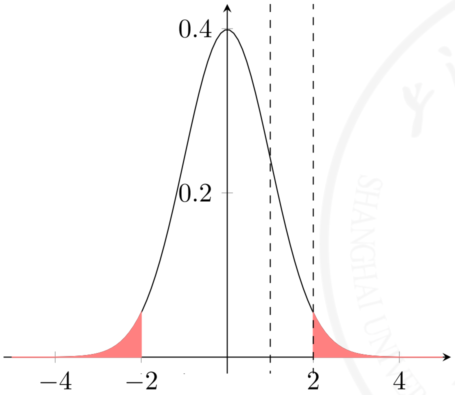
$$\phi\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- 而其分布函数为

$$\Phi\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} \phi\left(t\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

由于$\Phi\left(x\right)$没有初等函数表示，因而一般我们用$\Phi\left(x\right)$来代表标准正态的分布函数。

正态分布



正态分布

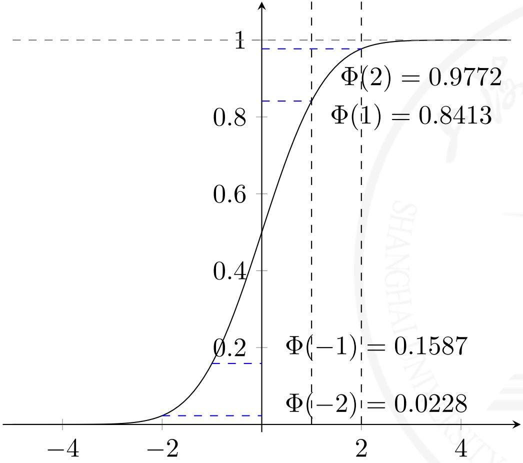
- 由于正态分布为对称分布，即$\phi(x)=\phi(-x)$，因而分布函数$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$。
- 如果$X\sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$，那么$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，根据标准正态的分布函数$\Phi(x)$可以计算$X$在区间内取值的概率，比如

$$P(|X-\mu|\leq\sigma)=P(|Z|<1)=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=0.6827$$

同理，有

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu|\leq 1.65\sigma)&=P(|Z|<1.65)\approx 0.90\\
P(|X-\mu|\leq 1.96\sigma)&=P(|Z|<1.96)\approx 0.95\\
P(|X-\mu|\leq 2\sigma)&=P(|Z|<2)=0.9545\\
P(|X-\mu|\leq 2.58\sigma)&=P(|Z|<2.58)\approx 0.99\\
P(|X-\mu|\leq 3\sigma)&=P(|Z|<3)=0.9973\\
P(|X-\mu|\leq 5\sigma)&=P(|Z|<5)\geq 1-10^{-6}\\
P(|X-\mu|\leq 6\sigma)&=P(|Z|<6)\geq 1-10^{-8}
\end{aligned}$$

正态分布



对数正态分布

若随机变量$Y = e^X, X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$，则我们称随机变量$Y$服从**对数正态分布（lognormal distribution）**，记为$Y \sim \mathrm{LN}\left(\mu, \sigma^2\right)$。

- 期望：$\mathbb{E}\left(Y\right) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$
- 方差：$\mathbb{V}\left(Y\right) = e^{2\left(\mu+\sigma^2\right)} - e^{2\mu+\sigma^2}$

对数正态分布经常用于建模城市人口大小、企业规模等变量，Gibrat（1931）指出了这一现象，因而被称为**Gibrat法则（Gibrat’s law）**。

- 之所以会出现对数正态分布，与城市、企业的随机比例增长（proportional rate of growth）有关系：如果城市或者企业规模的增长率的期望和方差相同，那么经过一段时间的增长，其大小就会近似服从对数正态分布。

幂律

- 所谓幂律，即两个变量X, Y之间存在着类似于

$$Y = cX^{\beta}$$

  的关系，其中：
  - c是一个一般不太重要的常数
  - β则是**幂律指数**（**power law exponent**）
- 如果将其取对数，则幂律关系会变成一个线性关系：

$$\ln Y = \ln c + \beta \ln X$$

- c仅仅反映尺度，而幂律具有**尺度不变**（**scale invariance**）的性质：
  - 比如，如果X是一个城市的人口，以“人数”为单位，那么以“百万人”为单位的人数$\tilde{X} = {}^{X}/_{10^6} \triangleq kX$，那么

$$Y = cX^{\beta} = c\left(\frac{\tilde{X}}{k}\right)^{\beta} = \tilde{c}\tilde{X}^{\beta}$$

    同样满足幂律，仅仅是前面的常数变化了。

齐夫定律

- 具体到城市大小，如果令Y是城市从大到小的排名（Rank），X为城市的人口数（Size），大量研究发现这两个变量几乎满足幂律的关系，比如Gabaix（2016）对美国25万人以上城市的估计，这两者的关系大约是

$$\ln(\text{Rank}) = 7.88 - 1.03\ln(\text{Size})$$

其中Rank作为排序，数值越小代表城市越大，如果有N个城市，那么$\frac{\text{Rank}}{N}$应该就是城市人口大于等于这个城市的比例。

- 如果将其写为幂律的形式，那么这个关系意味着

$$P(X \geq x) = \frac{\text{Rank}}{N} = e^{\ln(\text{Rank}) - \ln N} = \frac{a}{x^{\zeta}}$$

其中$\zeta = 1.03 \approx 1$，而$a = \frac{e^{7.88}}{N}$。

齐夫定律

根据如上幂律，如果X满足

$$P(X \geq x) \propto \frac{1}{x^{\zeta}}$$

那么X的密度函数为

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}\left[1 - P(X \geq x)\right] \propto \frac{1}{x^{\zeta+1}}$$

其中$\propto$是“成比例”的意思，即

$$f_X(x) = C \cdot \frac{1}{x^{\zeta+1}}$$

其中C使得密度函数线下面积为1。

齐夫定律

- 如果令$\zeta=1$，那么以上关系可以写为

$$P\left(\text{Size}\geq x\right)\propto\frac{1}{x}\Longleftrightarrow x\propto\frac{1}{\text{Rank}}$$

  即城市人口数与其排名的倒数成比例。
- 实际上，以上关系不仅仅对于城市的大小成立，在自然和社会中的很多数量都满足这一规律，比如语言中单词的频率、一个社会中姓氏人数的分布、企业的规模等等，这一规律以以语言学家Zipf命名，被称作**齐夫定律**（Zipf' s law）。
- 齐夫定律要求$\zeta=1$，当然也有很多现象不满足这一要求，但是同样满足幂律。比如，在股票市场中，股票收益率满足“三次法则”（cubic law），即

$$P\left(|r_t|>x\right)\propto\frac{1}{x^3}$$

  意味着收益率的密度函数在尾部收敛到0的速度大约是x^{-3}级别，远慢于正态分布的指数级，从而极端涨跌的概率比正态分布所预言的要大。

二八定律

- 除齐夫定律外，另一个与幂律有关的定律是二八定律（80/20 rule，或帕累托法则，Pareto principle）
- 该定律来自于意大利经济社会学家帕累托。帕累托发现，在意大利，大约80%的土地集中在20%的人手上
- ，此后发现很多与分配、质量控制等问题有关的现象都可以适用该定律。

帕累托分布

与帕累托法则对应的有**帕累托分布（Pareto distribution）**，同样符合幂律。

帕累托分布

如果令随机变量X为一个家庭的财富，那么财富高于x的人的比例可以用生存函数$S(x)=1-F(x)$来描述，如果假设该比例满足幂律，即

$$S(x)=P\{X>x\}=\begin{cases}\left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha} & x\geq x_m\\ 1 & x<x_m\end{cases}$$

其中x_m为X能取到的最小值，那么我们称X服从形状参数为α的帕累托分布，记为$X\sim\mathrm{Pa}(x_m,\alpha)$。

帕累托分布

- 其分布函数为

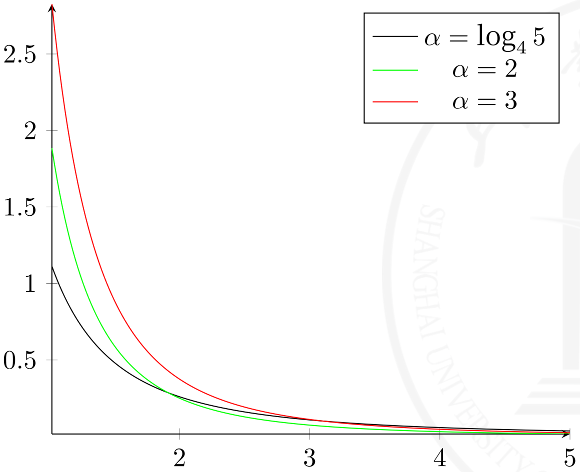
$$F(x) = \mathbb{1}\{x \geq x_m\}\left[1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^{\alpha}\right]$$

- 对应的密度函数为

$$f(x) = \mathbb{1}\{x \geq x_m\}\frac{\alpha x_m^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$$

- 根据生存函数，如果α越小，那么大于给定财富x的人数比例收敛到0的速度越慢，即右侧尾部收敛到0的速度更慢，意味着更大的分配不公平，故α也被称为尾部指数（tail index）或者帕累托指数（Pareto index）。
- 期望：$\frac{\alpha}{\alpha-1}x_m, \alpha > 1$，否则为$\infty$
- 方差：$\frac{\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}x_m^2, \alpha > 2$，否则为$\infty$

帕累托分布



帕累托分布与二八定律

现在考虑当α取何值时整个社会的财富分布会满足二八定律。

- 首先，20%的最富有人对应于$S\left(x^*\right)=0.2$，从而

$$\ln\left(\frac{x_m}{x^*}\right)=\frac{-\ln 5}{\alpha} \tag{1}$$

- 为了计算所有$X>x^*$的人占有全社会财富的比例，考虑一个划分$\Pi: x_m=t_0<t_1<\cdots<t_n=x^m$，那么财富在$[x_m,x^m]$区间内所占有的财富可以近似计算为

$$I=\sum_{k=1}^{n}\frac{t_k+t_{k-1}}{2}\left[F\left(t_k\right)-F\left(t_{k-1}\right)\right]$$

其中$F\left(t_k\right)-F\left(t_{k-1}\right)$为财富在$(t_{k-1},t_k]$区间内的人数比例，$\frac{t_k+t_{k-1}}{2}$为每人财富的近似计算，从而在$[x_m,x]$区间内所占有的财富可以使用积分

$$\int_{x_m}^{x}xdF\left(x\right)=\int_{x_m}^{x}t\frac{\alpha x_m^\alpha}{t^{\alpha+1}}dt=\alpha x_m^\alpha\int_{x_m}^{t}\frac{1}{t^\alpha}dt=\alpha x_m^\alpha\left[\frac{1}{1-\alpha}t^{-\alpha+1}\right]_{x_m}^{x}=\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(x_m-x^{1-\alpha}x_m^\alpha\right)$$

帕累托分布与二八定律

对于$\alpha > 1$，全社会的总财富量可以通过

$$\int_{x_m}^{\infty} x dF(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(x_m - x^{1-\alpha} x_m^{\alpha}\right)_{x_m}^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_m$$

计算。而大于x^*的总财富可以通过

$$\int_{x^*}^{\infty} x dF(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(x_m - x^{1-\alpha} x_m^{\alpha}\right)_{x_m}^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} x_m^{\alpha}(x^*)^{1-\alpha}$$

计算，从而两者比例为

$$\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1} x_m^{\alpha}(x^*)^{1-\alpha}}{\frac{\alpha}{\alpha-1} x_m} = \left(\frac{x_m}{x^*}\right)^{\alpha-1} = 0.8 \tag{2}$$

帕累托分布与二八定律

结合式(1)与式(2)，可以得到

$$\ln\left(\frac{x_m}{x^*}\right)=\frac{-\ln 5}{\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}\ln\frac{4}{5}$$

从而得到

$$\alpha=\frac{\ln 5}{\ln 4}=\log_4 5$$

即，二八法则可以对应$\alpha=\log_4 5$的帕累托分布。

χ^2分布

K个独立的标准正态分布的平方和的分布被称为**卡方分布**（**Chi-square distribution**）或者χ^2分布。即，如果$X_1, X_2, ..., X_K$为K个独立的标准正态分布，那么

$$X = \sum_{i=1}^{K} X_i^2 \sim \chi^2(K)$$

其中参数K为卡方分布的**自由度**（**degrees of freedom**）。

- 期望：$\mathbb{E}(X) = K$
- 方差：$\mathbb{V}(X) = 2K$
- 矩母函数：$(1-2t)^{-\frac{K}{2}}$

F分布

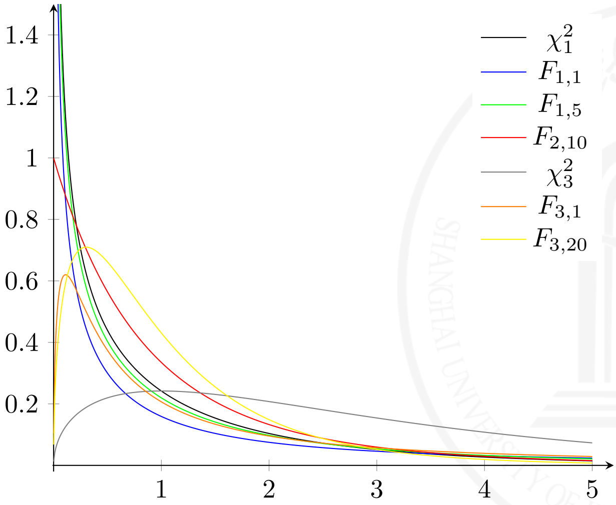
如果存在两个**独立**的χ^2分布$X_1 \sim \chi^2(n), X_2 \sim \chi^2(m)$，那么随机变量

$$F = \frac{X_1/n}{X_2/m}$$

即服从F**分布**（F**-distribution**），记为$F \sim \mathrm{F}(n, m)$，参数n, m为自由度。

- 期望：$\mathbb{E}(X) = \frac{m}{m-2}, m > 2$
- 方差：$\mathbb{V}(X) = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)}, m > 4$
- 矩母函数：不存在

χ^2分布与F分布



t分布

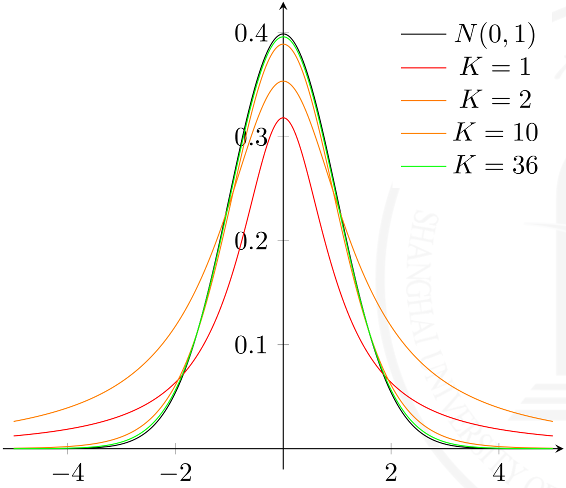
如果存在一个标准正态分布$Z\sim \mathrm{N}(0,1)$，以及一个χ^2分布$X\sim\chi^2(K)$，且Z和X独立，那么随机变量

$$T=\frac{Z}{\sqrt{X/K}}$$

即服从学生氏t分布（students' t-distribution）或者简称t分布（t-distribution），记为$T\sim \mathrm{t}(K)$，参数K为自由度。

- 期望：$\mathbb{E}(X)=0, K>1$
- 方差：$\mathbb{V}(X)=\frac{K}{K-2}, K>2$
- 矩母函数：不存在

标准正态分布与t分布



柯西分布

若随机变量X的概率密度函数为

$$f(x|\mu,\sigma)=\frac{1}{\pi\sigma}\left[1+\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]^{-1}$$

那么我们称X服从**柯西分布（Cauchy distribution）**，记为$X\sim\mathrm{C}(\mu,\sigma)$。

- 期望：不存在
- 方差：不存在
- 矩母函数：不存在

由于柯西分布的一阶矩不存在，因而通常作为不可积的分布的例子。此外，可以得到，两个独立的标准正态分布X,Y，其比例$U=\frac{Y}{X}$刚好服从柯西分布。此外，$\mathrm{C}(0,1)\sim\mathrm{t}(1)$。

随机变量的变换

- 对于一个可测函数$g(\cdot)\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$Y=g(X)$也是一个随机变量。如果我们已知$X$的分布，如何获得新的随机变量$Y$的分布呢?
- 首先仿照随机变量的定义，我们定义函数$g(\cdot)$对于一个集合的逆为:

$$g^{-1}(A)=\{x\in\mathbb{R}:g(x)\in A\}$$

因而对于单点集

$$g^{-1}(\{y\})=\{x\in\mathbb{R}:g(x)=y\}$$

离散随机变量的变换

对于离散型的随机变量X，$g(X)$也是离散型的， 因而随机变量Y的p.m.f.为:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= P(Y=y) \\
&= \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} P(X=x) \\
&= \sum_{x\in g^{-1}(\{y\})} f_X(x)
\end{aligned}
$$

由此可以确定随机变量$Y=g(X)$的概率质量函数。

离散随机变量的变换

抛骰子

若假设X为一次抛骰子的随机试验的结果，其概率质量函数为:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

如果我们希望得到$Y=g(X)=(X-3.5)^2$的概率质量函数，可以通过以上步骤，比如:

$$g^{-1}(\{6.25\})=\left\{x\in\mathbb{R}:(x-3.5)^2=6.25\right\}=\{1,6\}$$

因而$P(Y=6.25)=P(X\in\{1,6\})=\frac{1}{3}$。以此类推，我们得到$Y$的概率质量函数

Y	6.25	2.25	0.25
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

连续随机变量的变换

对于一个一般的随机变量X，随机变量$Y=g(X)$的累积分布函数可以使用如下定义计算：

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(g(X) \le y) \\ &= P(\{x : g(x) \le y\}) \\ &= \int_{\{x:g(x)\le y\}} dF_X \end{aligned}$$

特别的，如果$g(\cdot)$严格单调递增，则：$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$；
如果$g(\cdot)$严格单调递减，则：$F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right)$

连续随机变量的变换

均匀分布的变换

如果$U \sim \mathrm{U}(-1,1)$，欲求$Y = U^2$的密度函数，可以首先求其累计分布函数，对于$y \geq 0$，有：

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P\left(U^2 \leq y\right) \\
&= P\left(\{-\sqrt{y} \leq U \leq \sqrt{y}\}\right) \\
&= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} du = \sqrt{y}
\end{aligned}
$$

因而其密度函数为：

$$
f_Y(y) = \mathbb{1}\{0 < y < 1\} \frac{1}{2\sqrt{y}}
$$

分布族

- 给定任意的一个$(\Omega, \mathscr{F})$，在这个空间里面我们可以定义各种不同的概率函数，统计学需要解决的问题就是使用样本数据去推断总体的概率函数$\mathscr{P}$。
- 然而一般情况下，概率函数$\mathscr{P}$的可能性太多，因而我们经常将概率函数限制在一个可能集合内，为此我们可以定义参数族的概念。

参数族

如果对于每一个已知的$\theta \in \Theta, \Theta \subset \mathbb{R}^d$，$P_\theta$为在$(\Omega, \mathcal{F})$上的一个已知的概率函数，那么$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$即被称为**参数族（parametric family）**，其中Θ为**参数空间（parametric space）**，正整数d为参数空间的维数。

位置尺度族

对于一个随机变量X，我们令$Y=\sigma X+\mu,\sigma>0$，那么其分布函数：

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y\le y)=P(\sigma X+\mu\le y)\\ &= P\left(X\le \frac{y-\mu}{\sigma}\right)\\ &= F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

所以其密度函数满足

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sigma}f_X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

同时，其期望和方差满足

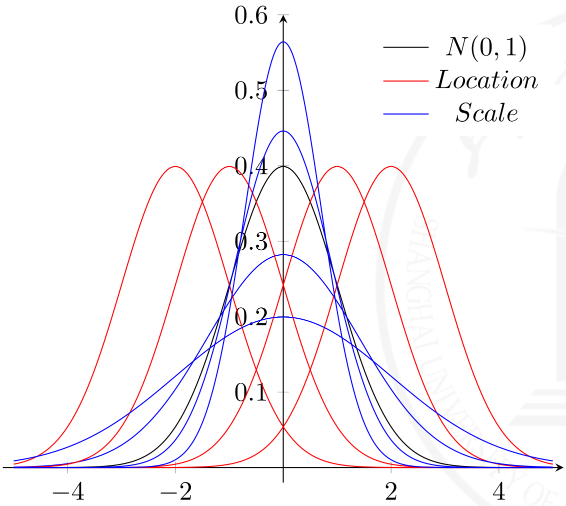
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sigma\mathbb{E}(X)+\mu\\ \mathbb{V}(Y) &= \sigma^2\mathbb{V}(X)\end{aligned}$$

位置尺度族

位置尺度族

令$f(x)$为任意的密度函数，那么形如$\frac{1}{\sigma}f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$的密度函数就形成了以$\theta=(\mu,\sigma)$为参数的参数族，我们称之为**位置尺度族**（location-scale family）。位置尺度族即对于任意的随机变量做位移和数乘所得到的随机变量的分布组成的分布族。其中参数μ一般称为**位置参数**（location parameter），而σ一般称为**尺度参数**（scale parameter）。

位置尺度族



位置尺度族

正态分布

标准正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对于任意的$\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$，其位置尺度族的密度函数可以写为：

$$f(x|\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}}$$

即正态分布的密度函数。因而正态分布族$\{P_{\mu,\sigma}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+\}$为一个位置尺度族。

标准化

- 正如正态分布一样，很多时候我们会将一个随机变量变换为期望为0、方差为1的随机变量，即令随机变量

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

易得

$$\mathbb{E}(Z)=0$$
$$\mathbb{V}(Z)=1$$

我们称之为**标准化**（standardized）。

- 由于$P(X\le x)=P(Z\le \sigma x+\mu)$，因而应用中对于位置尺度族，经常首先研究标准化之后的随机变量，进而推广到其位置尺度族。

单参数指数分布族

指数分布族

对于一个参数族$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$，如果其概率密度（质量）函数可以写成如下形式：

$$f(x|\theta) = h(x) \cdot \exp\{\eta(\theta) \cdot T(x) - B(\theta)\}$$

那么我们称$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$为**单参数指数分布族（one-parameter exponential family）**。

单参数指数分布族

二项分布

令N为已知的正整数，如果随机变量$X \sim Bi\left(N,p\right)$，参数$\theta = p \in \Theta = \left(0,1\right)$，其质量函数：

$$
\begin{aligned}
P\left(x|p\right) &= \left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right) p^x \left(1-p\right)^{N-x} \\
&= \left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right) \exp\left\{x \ln\left(p\right) + \left(N-x\right)\ln\left(1-p\right)\right\} \\
&= \left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right) \exp\left\{x\left[\ln\left(p\right) - \ln\left(1-p\right)\right] + N\ln\left(1-p\right)\right\} \\
&= \left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right) \exp\left\{x\left[\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right] + N\ln\left(1-p\right)\right\}
\end{aligned}
$$

故令$h\left(x\right) = \left(\begin{array}{c} N \\ x \end{array}\right)$，$\eta\left(\theta\right) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$，$T\left(x\right) = x$，$B\left(\theta\right) = -N\ln\left(1-p\right)$，所以二项分布属于指数分布族。

单参数指数分布族

泊松分布

泊松分布参数为$\theta = \lambda \in \Theta = (0, \infty)$，其质量函数为：

$$P(x|\lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \frac{1}{x!} \exp\{x \ln(\lambda) - \lambda\}$$

故令$h(x) = \frac{1}{x!}$，$\eta(\theta) = \ln(\lambda)$，$T(x) = x$，$B(\theta) = \lambda$，所以泊松分布属于指数分布族。

单参数指数分布族

指数分布

指数分布的密度函数为:

$$
\begin{aligned}
f(x|\beta) &= \mathbb{1}\{x>0\}\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}} \\
&= \mathbb{1}\{x>0\}\exp\left\{-x\cdot\frac{1}{\beta}-\ln\beta\right\}
\end{aligned}
$$

因而令$h(x)=\mathbb{1}\{x>0\}$，$\eta(\theta)=-\frac{1}{\beta}$，$T(x)=x$，$B(\theta)=\ln\beta$，故指数分布属于指数分布族。

单参数指数分布族

非指数分布族

若某一密度函数为:

$$f(x|\beta) = \frac{1}{\beta} \exp\left\{1 - \frac{x}{\beta}\right\}, x > \beta > 0$$

可知$f(x|\beta)$为密度函数。然而:

$$\begin{aligned} f(x|\beta) &= \mathbb{1}\{x > \beta\} \frac{1}{\beta} \exp\left\{1 - \frac{x}{\beta}\right\} \\ &= \mathbb{1}\{x > \beta\} \cdot \exp\left\{-\frac{x}{\beta} - \ln\beta + 1\right\} \end{aligned}$$

由于$\mathbb{1}\{x > \beta\}$不仅仅依赖于x，而且依赖于β，因而这一分布不属于指数分布族。

指数分布族的规范形式

指数分布的规范形式

为了方便起见，我们会把密度函数重新参数化，即对于指数分布族

$$f\left(x|\theta\right)=h\left(x\right)\cdot\exp\left\{\eta\left(\theta\right)\cdot T\left(x\right)-B\left(\theta\right)\right\}$$

我们令$\lambda=\eta\left(\theta\right)$，那么指数分布族可以写为:

$$f\left(x|\lambda\right)=h\left(x\right)\cdot\exp\left\{\lambda\cdot T\left(x\right)-C\left(\lambda\right)\right\}$$

并将这种形式成为**规范形式（canonical form）**。

指数分布族的矩

如果随机变量X的概率密度（质量）函数为规范形式，那么

$$\mathbb{E}\left[T\left(X\right)\right]=C'\left(\lambda\right)$$
$$\mathbb{V}\left[T\left(X\right)\right]=C''\left(\lambda\right)$$

指数分布族矩的证明

对于规范形式$f(x|\lambda) = h(x) \cdot \exp\{\lambda \cdot T(x) - C(\lambda)\}$，由于其为密度函数，因而：

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(x|\lambda)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot \exp\{\lambda \cdot T(x) - C(\lambda)\}\, dx$$

从而：

$$e^{C(\lambda)} = \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot \exp\{\lambda \cdot T(x)\}\, dx$$

两边对λ求导可得：

$$\begin{aligned} e^{C(\lambda)} C'(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot \exp\{\lambda \cdot T(x)\}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp\{\lambda \cdot T(x)\}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot T(x) \exp\{\lambda \cdot T(x)\}\, dx \end{aligned}$$

整理可得：

$$C'(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} T(x) \cdot h(x) \cdot \exp\{\lambda \cdot T(x) - C(\lambda)\}\, dx = \mathbb{E}[T(X)]$$

指数分布族的规范形式

二项分布的规范形式

对于二项分布:

$$P(x|p) = \binom{N}{x} \exp\left\{x\left[\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right] + N\ln(1-p)\right\}$$

如果令$\lambda = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$，那么

$$P(x|\lambda) = \binom{N}{x} \exp\left\{\lambda \cdot x - N\ln\left(1+e^{\lambda}\right)\right\}$$

即为二项分布的质量函数的规范形式。其中，$T(x) = x$，因而

$$\mathbb{E}[T(X)] = \mathbb{E}(X) = C'(\lambda) = \frac{Ne^{\lambda}}{1+e^{\lambda}} = Np$$

$$\mathbb{V}[T(X)] = \mathbb{V}(X) = C''(\lambda) = \frac{Ne^{\lambda}}{(1+e^{\lambda})^2} = Np(1-p)$$

作业

- 2.2， 2.4， 2.6， 2.9， 2.10