多元随机变量

司继春

[1]上海对外经贸大学

2024年10月

概览

多元随机变量

多元随机变量/随机向量的定义

给定一个概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$，一个$n$维的随机向量$X$即从样本空间到$n$维欧几里得空间的函数，$X : \Omega \to \mathbb{R}^n$。

向量表达

注意以上定义我们使用了向量的表达方式，即:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

多元随机变量

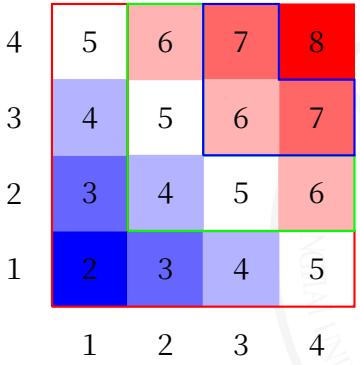


Figure: 四面骰子

多元随机变量

多元随机变量

投两个均匀的四面骰子，则$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots(4,4)\}$：

- 定义随机变量X_1为两个骰子的数值之和
- 定义X_2为两个骰子中较小的骰子的数值，如上图所示。

那么向量$X = [X_1, X_2]' : \Omega \to \mathbb{R}^2$为一个随机向量，其可能的取值为

$$\left\{[x_1, x_2]', x_1 \in \{2, ..., 8\}, x_2 \in \{1, 2, 3, 4\}\right\}$$

例如，$X^{-1}\left(\left\{[5,2]'\right\}\right) = \{(2,3),(3,2)\}$

随机向量的概率

进而，我们可以使用$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$和一个随机向量$X$的定义导出一个$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n)$上的概率函数的定义。定义

$$P_X(A) = \mathscr{P}\left(X^{-1}(A)\right), \forall A \in \mathscr{B}^n$$

随机向量的概率

在四面骰子的例子中，如果$A = \left\{[5,2]'\right\}$，那么

$$P_X(A) = \mathscr{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathscr{P}\left(\{(2,3),(3,2)\}\right) = \frac{2}{16}$$

同理，$P_X\left(\left\{[2,1]'\right\}\right) = \frac{1}{16}$，$P_X\left(\left\{[5,a]', a \in \{1,2,3,4\}\right\}\right) = \frac{4}{16}$等等。

联合分布函数

联合分布函数

由$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$导出的概率空间$(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}^n, P)$的**联合分布函数（joint c.d.f.）**定义为:

$$F(x) = F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

其中$x = [x_1, x_2, ..., x_n]'$。

联合分布函数为单调递增且$F(-\infty, -\infty, ..., -\infty) = 0$，$F(\infty, \infty, ..., \infty) = 1$

联合密度函数

联合密度函数

1. 如果随机向量X的每个分量都是离散型随机变量，那么可以定义联合概率质量函数p.m.f为：

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = P(\{X_1 = x_1, ..., X_n = x_n\})$$

2. 如果随机变量X的联合分布函数连续，如果函数$f(x)$满足：$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx, x \in \mathbb{R}^n, A \subset \mathscr{B}^n$那么我们称$f(x)$为其联合概率密度函数（p.d.f）。特别的，如果联合分布函数$F(x)$可微那么：

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

概率质量函数

概率质量函数

四面骰子例子中的概率质量函数可以用下表描述:

$X_2 \backslash X_1$	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

概率密度函数

概率密度函数

如果随机向量$X = [X_1, X_2]'$的两个分量分别服从正态分布，且相互独立，那么其概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{ -\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\}$$

边缘分布

- 既然随机向量的每个分量X_i都是一个随机变量，那么自然也存在分布函数$F_{X_i}(x_i)$。
- 如果已知联合分布函数，根据（联合）分布函数的定义，X_i的分布函数可以通过

$$F_{X_i}(x_i) = P(X_i \leq x_i) = P(X_1 \leq \infty, ..., X_i \leq x_i, ..., X_n \leq \infty) = F_X(\infty, ..., x_i, ..., \infty)$$

计算。
- $F_{X_i}(x_i)$即随机变量X_i的分布函数，在这里由联合分布函数计算出来，所以我们也将其称为联合分布函数$F(x)$的**边缘分布函数（marginal c.d.f.）**，而对应的密度（质量）函数可以相应定义。

边缘分布

- 进一步拓展，如果$X=[X_1,...,X_n]'$为随机向量，那么其i_k个分量$\widetilde{X}=[X_{i_1},X_{i_2},...,X_{i_k}]',1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n$也是一个随机向量。
- $\widetilde{X}$的联合分布函数同样可以通过$F(x)$来定义，即令$F(x)$中满足$j\notin\{i_1,...i_k\}$的分量为∞。
- 比如，对于三维随机变量$X=[X_1,X_2,X_3]'$，则$\widetilde{X}=[X_1,X_2]'$的分布函数为：$F_{\widetilde{X}}(\widetilde{x})=F(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2,\infty)$。
- 而对应的密度（质量）函数可以通过

$$f_{\widetilde{X}}(x)=\frac{\partial^2F(x_1,x_2,\infty)}{\partial x_1\partial x_2}=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial^3F(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}dx_3=\int_{\mathbb{R}}f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3$$

来计算。

边缘分布

边缘质量函数

四面骰子例子中，$X = [X_1, X_2]'$，X_1和X_2的边缘概率质量函数如下表所示:

$X_2 \backslash X_1$	2	3	4	5	6	7	8	F_{X_2}	f_{X_2}
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{12}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{1}{16}$
F_{X_1}	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$		$\sum f_{X_2}$ $\|\|$
f_{X_1}	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\sum f_{X_1} =$	1

边缘分布

边缘密度函数

上例中的联合正态分布，其边缘分布函数为：

$$
\begin{aligned}
F_{X_1}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{ -\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{ -\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} \right\} dx_2 \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{ -\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dx_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{-\infty}^{t} \exp\left\{ -\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\} dx_1
\end{aligned}
$$

则其边缘密度函数为：

$$
f_{X_1}(t) = \frac{dF_{X_1}(t)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left\{ -\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right\}
$$

边缘分布

注意如果只确定了边缘分布，联合分布并不能唯一确定。

联合分布与边缘分布

以下两个联合质量函数具有相同的边缘分布，然而其联合质量函数并不相同：

$X_2 \backslash X_1$	0	1	f_{X_2}
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
f_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$X_2 \backslash X_1$	0	1	f_{X_2}
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
f_{X_1}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

边缘分布与联合分布

联合分布与边缘分布

如果随机向量$[U,V]'$，且$\text{supp}\left([U,V]'\right)=[0,1]\times[0,1]$，其分布函数为：

$$F_{U,V}(u,v)=\min\{u,v\},[u,v]'\in[0,1]\times[0,1]$$

- 联合分布函数的定义域应该是$\mathbb{R}^n$，然而由于这里支撑集为$[0,1]\times[0,1]$，从而不在这个区域的分布函数并不重要，只需要根据定义在其他部分做自然的延拓就可以。
- 比如，对于任意的$u>1,v\in[0,1]$，分布函数应为

$$F_{U,V}(u,v)=P(U\le u,V\le v)=P(U\le 1,V\le v)=F_{U,V}(1,v)$$

从而我们这里只写出了在支撑集上的分布函数，下同。

边缘分布与联合分布

联合分布与边缘分布

如果随机向量$[U,V]'$，且$\text{supp}\left([U,V]'\right)=[0,1]\times[0,1]$，其分布函数为：

$$F_{U,V}(u,v)=\min\{u,v\},[u,v]'\in[0,1]\times[0,1]$$

其边缘分布：

$$F_U(u)=F_{U,V}(u,\infty)=F_{U,V}(u,1)=\mathbb{1}\{0\le u\le 1\}\cdot u$$
$$F_V(v)=F_{U,V}(\infty,v)=F_{U,V}(1,v)=\mathbb{1}\{0\le v\le 1\}\cdot v$$

即其边缘分布为均匀分布。

边缘分布与联合分布

联合分布与边缘分布

如果另一分布函数为

$$\tilde{F}_{U,V}(u,v) = uv, [u,v]' \in [0,1] \times [0,1]$$

其边缘分布也为均匀分布：

$$\tilde{F}_U(u) = \tilde{F}_{U,V}(u,\infty) = \tilde{F}_{U,V}(u,1) = \mathbb{1}\{0 \le u \le 1\} \cdot u$$

$$\tilde{F}_V(v) = \tilde{F}_{U,V}(\infty,v) = \tilde{F}_{U,V}(1,v) = \mathbb{1}\{0 \le v \le 1\} \cdot v$$

因而如果只知道边缘分布，不能确定其联合分布。

边缘分布与联合分布

- 以上示例中，虽然$F_{U,V}(\cdot,\cdot)$和$\tilde{F}_{U,V}(u,v)$的边缘分布函数相同，但是联合分布函数确实不相同的，那么意味着，如果我们仅仅知道$U \sim \mathrm{U}(0,1), V \sim \mathrm{U}(0,1)$，是无法反推回其联合分布函数的。
- 这两者的差别就在于：边缘分布仅仅建模了单个随机变量的分布，然而联合分布还包含了两个随机变量之间相依性（dependency）的信息。

多元随机变量的期望

- 与一元随机变量类似，对于随机向量X的数学期望可以使用Riemann-Stieltjes积分进行定义，不过我们在这里需要多元函数的Riemann-Stieltjes积分，其定义过程可以在一元的Riemann-Stieltjes积分基础上进行拓展，需要做一些特殊的定义。
- 一个难点是如何定义$\Delta F(x)$?
- 按照一元函数的定义，即$\Delta F(x) = F(x_2) - F(x_1)$显然是不合适的，因为这里$x_1, x_2$均为$n$维向量。
- 为此，我们需要定义在一个n维矩形

$$A = \times_{j=1}^{n} (a_j, b_j]$$

上的$\Delta F(x)$。

$\mathbb{R}^n$上的Riemann-Stieltjes积分

- 考虑A的2^n个端点

$$\mathscr{V} = \left\{v_1, ..., v_{2^n} | v_m = [x_{1m}, ..., x_{nm}]', x_{jm} \in \{a_j, b_j\}\right\}$$

其中如果$[x_{1m}, ..., x_{nm}]'$中a_j的数量为偶数则$\text{Sign}(v_m) = 1$，否则$\text{Sign}(v_m) = -1$。

- 使用如上记号，对于n维矩形A，$\Delta F(x)$可以被定义为

$$\Delta F_A = \sum_{v \in \mathscr{V}} \text{Sign}(v) F(v)$$

- 可以证明，如果$F(x)$可微，那么

$$\Delta F_A = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x) \, dx_n \cdots dx_1$$

其中$f(x) = \frac{\partial^n F(x)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$。

$\mathbb{R}^n$上的Riemann-Stieltjes积分

$\Delta F(x)$的定义

对于二维平面上的矩形$A=(0,1]\times(2,3]$

- 四个顶点为$\{(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$，其中$(0,2)$和$(1,3)$分别包含了2个和0个左端点，从而$\text{Sign}((0,2))=\text{Sign}((1,3))=1$
- 而$(0,3)$和$(1,2)$都只包含1个左端点，从而$\text{Sign}((0,3))=\text{Sign}((1,2))=-1$。
- 从而

$$\Delta_A F=F(1,3)+F(0,2)-F(0,3)-F(1,2)$$

$\mathbb{R}^n$上的Riemann-Stieltjes积分

- 接下来，我们可以首先仿照一维上的定义，对每一维都做一个划分：$\Pi_j : a_j = x_{i0} < x_{i1} < \cdots < x_{i,m_j} = b_j$，那么积分区域$A$可以被划分为

$$A = \bigcup_{\mathscr{I}} \left(\times_{j=1}^{n} A_{j,i_j} \right)$$

其中$\mathscr{I} = \{(i_1, i_2, ..., i_n) \,|\, 1 \le i_j \le m_j\}$，$A_{j,i_j} = \left(a_{j,i_j}, b_{j,i_j}\right]$。

- 如此，我们将$\mathbb{R}^n$中的一个“矩形”A分解为了很多小的矩形$R_J = \times_{j=1}^{n} A_{j,i_j}, J \in \mathscr{I}$。
- 进一步，定义

$$I = \sum_{J \in \mathscr{I}} g\left(x_J\right) \Delta F_{R_J}$$

其中x_J为矩形R_J中的某个值。

- 现在，令$mesh\left(\Pi_j\right) \to 0, j = 1, ..., n$，如果以上级数极限存在，就可以定义Riemann-Stieltjes积分$\int_A g\left(x\right) dF\left(x\right)$了。

$\mathbb{R}^n$上的Riemann-Stieltjes积分

- 如此，对于一个随机向量$X=[X_1,...,X_n]'$及其联合分布函数$F(x)$，对于任意的函数$g(x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，可以定义期望

$$\mathbb{E}[g(X)]=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dF(x)$$

- 特别的，如果存在密度函数$f(x)$，那么如上期望可以使用

$$\mathbb{E}[g(X)]=\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,f(x)\,dx$$

计算。

- 根据此定义，如果令$g(X)=\iota_i'X=X_i$，其中$\iota_i=[0,0,...,1,...0]'$，有

$$\mathbb{E}\left(\iota_i'X\right)=\int_{\mathbb{R}^n} x_i dF(x)=\int_{\mathbb{R}} x_i dF_{X_i}(x_i)=\mathbb{E}(X_i)$$

即多元随机变量的分量的期望与一元随机变量的期望定义相同。

期望的计算

四面骰子的期望

在四面骰子例子中，令$g(x_1, x_2) = x_1 x_2$，那么

$$\mathbb{E}[g(X_1, X_2)] = \mathbb{E}(X_1 X_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 x_2 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$
$$= \frac{1 \times 2 \times 1 + 1 \times 3 \times 2 + \cdots + 4 \times 8 \times 1}{16} = \frac{85}{8}$$

$X_2 \backslash X_1$	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

期望的计算

联合正态的期望

在联合正态的例子中，令$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2$，那么

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X_1, X_2)] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x_1 + x_2) \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} (x_1 + x_2) \exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx_1 dx_2 \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x_1 \exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx_1 dx_2 \\
&+ \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x_2 \exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

期望的计算

联合正态的期望

其中

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} x_1 \exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}\exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx_1dx_2$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\int_{\mathbb{R}}\exp\left\{-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}dx_2\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\int_{\mathbb{R}} x_1\exp\left\{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}dx_1\right]$$

$$=1\cdot\mu_1=\mu_1$$

另一部分同理，从而

$$\mathbb{E}\left[g\left(X_1,X_2\right)\right]=\mathbb{E}\left(X_1+X_2\right)=\mu_1+\mu_2$$

随机向量的期望

- 我们通常把随机向量的期望写为向量形式：

$$\mathbb{E}(X)=\begin{bmatrix}\mathbb{E}(X_1)\\ \mathbb{E}(X_2)\\ \vdots\\ \mathbb{E}(X_n)\end{bmatrix}$$

- 在这里期望的线性性仍然成立，比如，如果$\iota=[1,1,...,1]'$为全部由1构成的向量，那么：

$$\mathbb{E}\left(\iota' X\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$

- 同理如果令$\mu=\mathbb{E}(X)=[\mathbb{E}(X_1),\mathbb{E}(X_2),...,\mathbb{E}(X_d)]'$，令$a\in\mathbb{R}^n$，那么我们有

$$\mathbb{E}\left(a' X\right)=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=a'\mathbb{E}(X)=a'\mu$$

随机向量的期望

随机向量期望的线性性

对于一个实数矩阵$A_{h\times n}=[a_1,a_2,...,a_h]'$，以及$h$维向量$b=[b_1,...,b_h]'$，有

$$\mathbb{E}(AX+b)=A\mathbb{E}(X)+b$$

Proof.

矩阵乘积为$AX=[a_1'X,a_2'X,...,a_h'X]'$，其期望为

$$\mathbb{E}(AX+b)=\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix}a_1'X+b_1\\a_2'X+b_2\\\vdots\\a_h'X+b_h\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\mathbb{E}(a_1'X)+b_1\\\mathbb{E}(a_2'X)+b_2\\\vdots\\\mathbb{E}(a_h'X)+b_h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1'\mathbb{E}(X)\\a_2'\mathbb{E}(X)\\\vdots\\a_h'\mathbb{E}(X)\end{bmatrix}+b=A\mathbb{E}(X)+b$$

□

随机向量的期望

四面骰子随机向量的期望

在四面骰子的例子中，随机向量$X = [X_1, X_2]'$中每个分量的期望都可以使用其边缘分布进行计算，从而得到

$$\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1 - X_2) &= \mathbb{E}\left([1, -1]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) = [1, -1]\,\mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

随机向量的矩母函数

矩母函数

对于随机向量$X = [X_1, ..., X_n]'$，令$t = [t_1, ..., t_n]'$，矩母函数可以定义为

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{t'X}\right)$$

根据以上定义，如果令$\tilde{t} = [0, ..., t_i, ..., 0]$，即$\tilde{t}$的第$i$个分量为$t_i$，其他分量为0，那么

$$M_X(\tilde{t}) = \mathbb{E}\left(e^{\tilde{t}'X}\right) = \mathbb{E}\left(e^{t_i X_i}\right) = M_{X_i}(t_i)$$

即随机变量X_i的矩母函数。

协方差

对于随机向量$X=[X_1,X_2]'$，如果$\mathbb{E}\left(X_1^2\right)<\infty,\mathbb{E}\left(X_2^2\right)<\infty$，根据Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\mathbb{E}\left|X_1X_2\right|\leq\sqrt{\mathbb{E}\left|X_1\right|^2\mathbb{E}\left|X_2\right|^2}<\infty$$

即X_1X_2可积，我们可以定义两个随机变量的**协方差（covariance）**：

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\left(X_1,X_2\right)&=\mathbb{E}\left[\left(X_1-\mathbb{E}\left(X_1\right)\right)\left(X_2-\mathbb{E}\left(X_2\right)\right)\right]\\&=\mathbb{E}\left[X_1X_2-\mathbb{E}\left(X_1\right)X_2-X_2\mathbb{E}\left(X_1\right)+\mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)\right]\\&=\mathbb{E}\left(X_1X_2\right)-2\mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)+\mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)\\&=\mathbb{E}\left(X_1X_2\right)-\mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)\end{aligned}$$

当$X_2=X_1$时，

$$\mathbb{C}\left(X_1,X_1\right)=\mathbb{E}\left(X_1^2\right)-\left[\mathbb{E}\left(X_1\right)\right]^2=\mathbb{V}\left(X_1\right)$$

协方差的计算

四面骰子的协方差

根据例以上计算，随机向量$X = [X_1, X_2]'$的协方差为

$$\mathbb{C}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{85}{8} - 5 \times \frac{15}{8} = \frac{5}{4}$$

协方差的性质

协方差性质

$$\mathbb{C}\left(aX_1+b,cX_2+d\right)=ac\mathbb{C}\left(X_1,X_2\right)$$

Proof.

根据定义，有

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\left(aX_1+b,cX_2+d\right)&=\mathbb{E}\left[\left(aX_1+b\right)\left(cX_2+d\right)\right]-\mathbb{E}\left(aX_1+b\right)\mathbb{E}\left(cX_2+d\right)\\&=\mathbb{E}\left(acX_1X_2+adX_1+bcX_2+bd\right)\\&\quad-ac\mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)-ad\mathbb{E}\left(X_1\right)-bc\mathbb{E}\left(X_2\right)-bd\\&=ac\left[\mathbb{E}\left(X_1X_2\right)-\mathbb{E}\left(X_1\right)\mathbb{E}\left(X_2\right)\right]\\&=ac\mathbb{C}\left(X_1,X_2\right)\end{aligned}$$

□

相关系数

进而可以使用协方差定义**简单相关系数（correlation coefficient）**或称**皮尔森相关系数（Pearson correlation coefficient）**：

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{\mathbb{C}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_1)\,\mathbb{V}(X_2)}}$$

由于

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}(X_1, X_2) &= \mathbb{E}\left[(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left|(X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2))\right| \\
&\leq \sqrt{\mathbb{E}\left|(X_1 - \mathbb{E}(X_1))\right|^2 \mathbb{E}\left|X_2 - \mathbb{E}(X_2)\right|^2} \\
&= \sqrt{\mathbb{V}(X_1)\,\mathbb{V}(X_2)}
\end{aligned}$$

可知$-1 \leq \rho_{X_1,X_2} \leq 1$。

相关系数

- 如果$\rho_{X_1,X_2}=\pm 1$，那么$P\left(X_2=c_1X_1+c_2\right)=1, c_1\neq 0$，此时$X_1$和$X_2$之间存在完美的线性关系；
- 如果$\rho_{X_1,X_2}>0$，我们称随机变量X_1和X_2正相关，反之称为负相关；
- 如果$\rho_{X_1,X_2}=0$，我们称随机变量X_1和X_2不相关（uncorrelated），记为$X_1\perp X_2$。

相关系数

注意这里的相关系数实际上只度量了随机变量之间的线性相关性。相关系数等于0并不意味着两个随机变量没有非线性的相关性

简单相关系数与非线性相关

如果随机变量$Y = Z^2$，$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(Z,Y) &= \mathbb{E}ZY - \mathbb{E}Z\mathbb{E}Y \\ &= \mathbb{E}Z^3 \\ &= 0\end{aligned}$$

两者相关系数为0，然而显然两者存在着非线性的函数关系。

协方差

联合密度函数

如果a, b为任意实数，Y和Z为一元随机变量，那么：

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX_1 + bX_2) &= \mathbb{E}(aX_1 + bX_2)^2 - [a\mathbb{E}(X_1) + b\mathbb{E}(X_2)]^2 \\ &= \mathbb{E}\left(a^2X_1^2 + b^2X_2^2 + 2abX_1X_2\right) \\ &\quad - \left[a^2(\mathbb{E}(X_1))^2 + b^2(\mathbb{E}(X_2))^2 + 2ab\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)\right] \\ &= a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2) + 2ab\mathbb{C}(X_1, X_2)\end{aligned}$$

如果$X_1 \perp X_2$，那么

$$\mathbb{V}(aX_1 + bX_2) = a^2\mathbb{V}(X_1) + b^2\mathbb{V}(X_2)$$

协方差矩阵

如果对于一个随机向量：$X = [X_1, X_2, ..., X_n]'$，我们可以定义矩阵：

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= [\mathbb{C}(X_i, X_j)] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1, X_2) & \cdots & \mathbb{C}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \cdots & \mathbb{C}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{C}(X_n, X_1) & \mathbb{C}(X_n, X_2) & \cdots & \mathbb{V}(X_n) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

易知协方差矩阵为实对称矩阵。

协方差矩阵的计算

- 根据协方差矩阵的定义，协方差矩阵可以如下计算：

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]\,[X - \mathbb{E}(X)]'\right)$$

注意X为列向量，从而：

$$X - \mathbb{E}(X) = \begin{bmatrix} X_1 - \mathbb{E}(X_1) \\ \vdots \\ X_n - \mathbb{E}(X_n) \end{bmatrix}$$

从而：$\mathbb{E}\,[X - \mathbb{E}(X)]\,[X - \mathbb{E}(X)]' =$

$$\mathbb{E}\begin{bmatrix} (X_1 - \mathbb{E}(X_1))^2 & (X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)) & \cdots & (X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_n - \mathbb{E}(X_n)) \\ (X_2 - \mathbb{E}(X_2))(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) & (X_2 - \mathbb{E}(X_2))^2 & \cdots & (X_2 - \mathbb{E}(X_2))(X_n - \mathbb{E}(X_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_n - \mathbb{E}(X_n))(X_1 - \mathbb{E}(X_1)) & (X_n - \mathbb{E}(X_n))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)) & \cdots & (X_n - \mathbb{E}(X_n))^2 \end{bmatrix}$$

协方差矩阵的计算

根据定义，有

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}X)(X-\mathbb{E}X)'\right] \\ &= \mathbb{E}\left[XX' - X\mathbb{E}\left(X'\right) - \mathbb{E}(X)X' + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(X'\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left(XX'\right) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(X'\right)\end{aligned}$$

协方差矩阵的性质

- 根据协方差矩阵的定义，对于任意的n维向量c，我们有：

$$\begin{aligned} c'\mathbb{V}(X)\,c &= c'\left[\mathbb{E}\left(X-\mathbb{E}X\right)\left(X-\mathbb{E}X\right)'\right]c \\ &= \mathbb{E}\left[c'\left(X-\mathbb{E}X\right)\left(X-\mathbb{E}X\right)'c\right] \\ &= \mathbb{E}\left\{\left[c'\left(X-\mathbb{E}X\right)\right]\left[c'\left(X-\mathbb{E}X\right)\right]'\right\} \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\left[c'\left(X-\mathbb{E}X\right)\right]\right)^2\right] \geq 0 \end{aligned}$$

因而协方差矩阵是一个半正定矩阵，我们记为$\mathbb{V}(X) \succeq 0$。

协方差矩阵的性质

- 当X的分量之间存在完美的线性关系时，即存在一个向量a使得$a'X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i = 0$以概率1成立（$P(a'X = 0) = 1$），从而自然有$\mathbb{E}(a'X) = 0$，那么

$$a'\mathbb{V}(X)\, a = \mathbb{E}\left[\left(\left[a'(X - \mathbb{E}X)\right]\right)^2\right] = 0$$

  此时等号成立。
- 否则，如果X的分量之间不存在完美的线性关系，那么$\mathbb{V}(X)$为正定矩阵，记为$\mathbb{V}(X) \succ 0$。

协方差矩阵的性质

线性变换的协方差矩阵

对于一个实数矩阵$A_{h\times n}$，以及h维向量$b=[b_1,...,b_h]'$，有

$$\mathbb{V}(AX+b)=A\mathbb{V}(X)A'$$

Proof.

令$A_{h\times n}=[a_1,a_2,...,a_h]$以及$b=[b_1,...,b_h]'$，有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(AX+b)&=\mathbb{E}\left[(AX+b-\mathbb{E}(AX+b))(AX+b-\mathbb{E}(AX+b))'\right]\\
&=\mathbb{E}\left[(AX-\mathbb{E}(AX))(AX-\mathbb{E}(AX))'\right]\\
&=\mathbb{E}\left[(AX-A\mathbb{E}(X))\left(X'A'-\mathbb{E}\left(X'\right)A'\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[AXX'A'-AX\mathbb{E}\left(X'\right)A'-A\mathbb{E}(X)X'A'+A\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(X'\right)A'\right]\\
&=A\left[\mathbb{E}\left(XX'\right)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(X'\right)\right]A'\\
&=A\mathbb{V}(X)A'
\end{aligned}$$

随机变量的独立性

随机变量的独立性

如果$[X_1, ..., X_n]'$是定义在概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$上的一系列随机变量，如果对于任意的Borel集$\{B_i, 1 \leq i \leq n\}$，有：

$$\mathscr{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \left(X_i\left(\omega\right) \in B_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}\left(X_i\left(\omega\right) \in B_i\right)$$

那么我们称随机变量$\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$相互独立。

对于两个随机变量$[X_1, X_2]'$，如果相互独立，可以简记为$X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$。

随机向量的独立性

对于随机向量，以上定义等价于：

随机向量的独立性

随机向量$[X_1, ..., X_n]'$各分量相互独立的充要条件是其联合分布函数等于边缘分布乘积：

$$F(x_1, ...x_n) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$$

如果密度（质量）函数存在，那么：

$$f(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

随机向量的独立性

独立性

若概率质量函数为:

$X_2 \backslash X_1$	2	3	4	5	6	7	8	F_{X_2}	f_{X_2}
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0	$\frac{7}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	$\frac{12}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{15}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{16}$	$\frac{1}{16}$
F_{X_1}	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{13}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{16}{16}$		$\sum f_{X_2}$ $\|\|$
f_{X_1}	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\sum f_{X_1} =$	1

可见$f_{X_1,X_2} \neq f_{X_1} \cdot f_{X_2}$，所以随机变量$X_1$与$X_2$不独立。

随机向量的独立性

独立性

两个联合分布函数:

$$F_{U,V}(u,v) = \min\{u,v\}, [u,v]' \in [0,1] \times [0,1]$$
$$\tilde{F}_{U,V}(u,v) = u \cdot v, [u,v]' \in [0,1] \times [0,1]$$

其边缘分布都为均匀分布，即$F_U(u) = u, F_V(v) = v$，然而由于:

$$F_{U,V}(u,v) = \min\{u,v\} \quad \neq F_U(u) \cdot F_V(v)$$
$$\tilde{F}_{U,V}(u,v) = u \cdot v \quad = F_U(u) \cdot F_V(v)$$

因而联合分布服从$F_{U,V}(u,v)$的随机变量不是相互独立的，而服从$\tilde{F}_{U,V}(u,v)$的随机变量是相互独立的。

随机变量函数的独立性

随机变量函数的独立性

$[X_1, ..., X_n]'$为一系列相互独立的随机变量，$1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k = n$，对于函数$f_1, f_2, ...f_k$，随机向量

$$\left[f_1\left(X_1, ...X_{n_1}\right), f_2\left(X_{n_1+1}, ...X_{n_2}\right), \cdots, f_k\left(X_{n_{k-1}+1}, ...X_{n_k}\right)\right]'$$

的分量也是相互独立的。

独立与期望

独立随机变量乘积的期望

如果随机向量$X = [X_1, X_2]'$的分量X_1和X_2相互独立且可积，那么

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$$

独立随机变量和的矩母函数

如果随机向量$X = [X_1, ..., X_n]'$的分量相互独立，常数向量$a = [a_1, ..., a_n]'$，记

$$S_n = a'X = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

那么矩母函数满足

$$M_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_i t)$$

独立与不相关

独立与不相关

如果X_1和X_2相互独立且方差存在，那么$\mathbb{C}(X_1, X_2) = 0$。

不相关与独立

然而反过来，不相关并不意味着独立。

- 比如，$Y = Z^2, Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$
- Y和Z之间不相关，但是$Y = Z^2$存在完美的函数关系，自然不会是独立的。
- 实际上，如果$Y \perp\!\!\!\perp Z$，那么Y和Z的任意函数$g(Y)$和$h(Z)$之间都应该是独立的，即$g(Y) \perp\!\!\!\perp h(Z)$从而$\mathbb{C}(g(Y), h(Z)) = 0$
- 即如果$Y \perp\!\!\!\perp Z$，那么Y和Z的任意函数之间都应该是不相关的。

条件期望

- 令$[Y, X']' \in \mathbb{R}^{n+1}$为一个随机向量，如何使用随机向量$X$预测随机变量$Y$?
- 所谓预测，就是找到一个X的函数$h(X)$，使得其与Y之间的差异最小。
- 在统计中，我们称这类问题为**回归**（**regression**）。
- 比较常见的做法是最小化**均方误差**（**mean squared error**）：

$$\min_{h \in L^2} \left\{ \mathbb{E}\left[(Y - h(X))^2 \right] \right\}$$

其中

$$L^2 = \left\{ h | h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{E}\left[(h(X))^2 \right] < \infty \right\}$$

条件期望

- 定义误差项$\epsilon = Y - h_0(X)$，对于随机变量X的任意函数$g(X)$，我们有：

$$\mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] = 0$$

- 如果令$\tilde{g}(X) = 1$，那么我们有

$$\mathbb{E}[\epsilon \cdot \tilde{g}(X)] = \mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}[Y - h_0(X)] = 0$$

因而

- $\mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] = 0$意味着

$$\mathbb{C}(\epsilon, g(X)) = \mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] - \mathbb{E}(\epsilon)\mathbb{E}[g(X)] = 0$$

即$\epsilon \perp g(X)$。

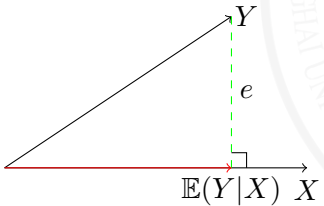
条件期望

- 通过反证法证明，如果存在$g(X)$使得$\mathbb{E}[\epsilon \cdot g(X)] \neq 0$，那么我们令

$$h(X) = h_0(X) + \frac{\mathbb{E}[\epsilon g(X)]}{\mathbb{E}[g^2(X)]} g(X)$$

根据这一构造，有：$\mathbb{E}\left[(Y - h(X))^2\right] < \mathbb{E}\left[(Y - h_0(X))^2\right]$，与$h_0(X)$最小化了均方误差矛盾。

- 我们称$h(X)$为Y在X上的**正交投影（orthogonal projection）**。



条件期望

- 我们知道，

$$\mathbb{E}(Y) = \arg\min_{c\in\mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E}(Y-c)^2 \right\}$$

- 仿照上式，我们可以定义随机变量Y给定X的**条件期望（conditional expectation）**：

$$\mathbb{E}(Y|X) = h_0(X) = \arg\min_{h\in L^2} \left\{ \mathbb{E}\left[(Y-h(X))^2 \right] \right\}$$

因而随机变量Y给定X的条件期望$\mathbb{E}(Y|X)$是一个关于X的函数。

- $\mathbb{E}(\epsilon) = \mathbb{E}[Y - \mathbb{E}(Y|X)] = 0$，从而有**全期望定律（law of total expectation）**：

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)]$$

注意到$\mathbb{E}(Y|X)$仅仅为X的函数，从而以上公式也可以写为

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(Y|X)\, dF_X$$

条件期望与期望

- 期望可以看做是没有任何其他信息时的最优预测，即只用常数对Y进行预测，是条件期望的特例：

$$\mathbb{E}(Y|c) = \arg\min_{c\in\mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E}\left[(Y-c)^2 \right] \right\}$$

- 这也就意味着：
  - 期望本身是对一个随机变量的最优预测
  - 具体的一个实现与期望之间的差异为误差项
  - 比如：
    - 如果全国所有人的平均体重为60公斤，那么随机从人群中选取一个人，对其体重的最优预测为60公斤
    - 单独每个人的体重与60公斤之间的差距为误差项

条件期望：离散情形

如果记$D \in \{0,1\}$代表性别，0代表女性、1代表男性，记Y为收入，那么根据以上全期望公式，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[Y-h\left(D\right)\right]^2 &= p_0\mathbb{E}\left(\left[Y-h\left(D\right)\right]^2|D=0\right)+p_1\mathbb{E}\left(\left[Y-h\left(D\right)\right]^2|D=1\right)\\ &= p_0\mathbb{E}\left(\left[Y-h\left(0\right)\right]^2|D=0\right)+p_1\mathbb{E}\left(\left[Y-h\left(1\right)\right]^2|D=1\right)\end{aligned}$$

其中$p_d = P\left(D=d\right)$，从而最小化$\mathbb{E}\left[Y-h\left(D\right)\right]^2$等价于分别最小化$\mathbb{E}\left(\left[Y-h\left(0\right)\right]^2|D=0\right)$及$\mathbb{E}\left(\left[Y-h\left(1\right)\right]^2|D=1\right)$。

- 比如，全国所有男性的平均体重为70公斤，所有女性平均体重为50公斤
- 那么：

$$\begin{cases}\mathbb{E}\left(Y|D=1\right)=70\\ \mathbb{E}\left(Y|D=0\right)=50\end{cases}$$

即条件期望为分组期望。

条件期望：连续情形

或者，如果我们能看到一个变量X为连续型变量，那么

$$\mathbb{E}(Y|X) = \arg\min_{h \in L^2} \left\{ \mathbb{E}\left[(Y - h(X))^2 \right] \right\}$$

为一个未知的函数：

- 比如，如果我们现在可以观察到身高（X）
- 可以假想如果有无数个身高一样的人的平均体重，如：

$$\mathbb{E}(Y|X = 170)$$

即为条件期望。

条件期望的性质

条件期望的性质

对于任意的可测函数$g(X)$，条件期望有如下性质：

1. $\mathbb{E}[g(X)|X] = g(X)$；
2. $\mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}(Y|X)) \cdot g(X)] = 0$；
3. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(Y|X)\, dF_X$；
4. $\mathbb{E}[(g(X) \cdot Y)|X] = g(X) \cdot \mathbb{E}(Y|X)$；
5. $\mathbb{E}(aY_1 + bY_2|X) = a\mathbb{E}(Y_1|X) + b\mathbb{E}(Y_2|X)$。

条件期望的性质

银行到达人数

假设每天到达银行的人数服从泊松分布$N \sim \mathrm{P}(\lambda)$，而每个到达银行的人，办理外汇业务的概率为$p$。那么给定到达人数$N$，办理外汇业务的人数$M$服从二项分布，即$M|N \sim \mathrm{Bi}(N,p), N \sim \mathrm{P}(\lambda)$。那么每天来银行办理外汇业务的人数的期望：

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(M|N)] = \mathbb{E}(Np) = p\mathbb{E}(N) = p\lambda$$

均值独立

- 注意到如果我们没有任何信息，因而只能用常数c去预测Y，那么

$$\mathbb{E}(Y|c) = c^* = \arg\min_{h \in L^2} \left\{ \mathbb{E}\left[(Y-c)^2 \right] \right\}$$

  - 即如果我们没有X，只能用常数预测Y，那么我们将得到Y的期望。
- 如果有其他随机变量X，但是$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$，那么$X$对$Y$的均值没有预测能力，退化成了一个常数而非$X$的函数，此时我们称$Y$对$X$是**均值独立**（**mean independence**）的。

均值独立

- 如果随机变量Y对X是均值独立的，那么：

$$\begin{aligned}\mathbb{C}(X,Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\\ &= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0\end{aligned}$$

  因而随机变量Y和X必然是不相关的。反之则不成立，不相关并不一定意味着均值独立。
- 实际上，可以证明，$\mathbb{C}(g(X),Y)=0$，即Y对X是均值独立的意味着Y与X的任意函数都不相关。
- 反过来不一定正确，即$\mathbb{C}(g(Y),X)=0$不一定成立
  - $Y=Z^2, Z\sim \mathrm{N}(0,1)$

条件方差

- 相应的，我们还可以定义**条件方差**

$$\mathbb{V}(Y|X) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2 |X\right]$$

- 根据条件期望的性质：

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(Y|X) &= \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}(Y|X))^2 |X\right] \\
&= \mathbb{E}\left\{\left[Y^2 + [\mathbb{E}(Y|X)]^2 - 2Y\mathbb{E}(Y|X)\right] |X\right\} \\
&= \mathbb{E}\left(Y^2|X\right) + \mathbb{E}\left\{[\mathbb{E}(Y|X)]^2 |X\right\} - 2\mathbb{E}\left[Y\mathbb{E}(Y|X)|X\right] \\
&= \mathbb{E}\left(Y^2|X\right) + [\mathbb{E}(Y|X)]^2 - 2\mathbb{E}(Y|X)\,\mathbb{E}[Y|X] \\
&= \mathbb{E}\left(Y^2|X\right) - [\mathbb{E}(Y|X)]^2
\end{aligned}$$

其中第4个等号由于$\mathbb{E}(Y|X)$也是X的函数

条件方差与方差

全方差定律（law of total variance）

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{V}(Y|X)] + \mathbb{V}[\mathbb{E}(Y|X)]$$

条件方差

银行到达人数的方差

在银行到达人数的例子中，可以计算每天办理外汇业务的人数的方差:

$$\mathbb{V}(M) = \mathbb{V}(\mathbb{E}(M|N)) + \mathbb{E}(\mathbb{V}(M|N))$$

其中$\mathbb{E}(M|N) = Np$，因而

$$\mathbb{V}[\mathbb{E}(M|N)] = \mathbb{V}(Np) = p^2\mathbb{V}(N) = p^2\lambda$$

而$\mathbb{V}(M|N) = Np(1-p)$，从而

$$\mathbb{E}(\mathbb{V}(M|N)) = \mathbb{E}(Np(1-p)) = \lambda p(1-p)$$

从而

$$\mathbb{V}(M) = p^2\lambda + \lambda p - \lambda p^2 = \lambda p$$

条件协方差

- 此外我们还可以定义**条件协方差（conditional covariance）**为

$$\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2|X\right) = \mathbb{E}\left[\left(Y_1 - \mathbb{E}\left(Y_1|X\right)\right)\left(Y_2 - \mathbb{E}\left(Y_2|X\right)\right)|X\right]$$

- 同样根据条件期望的性质，有

$$\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2|X\right) = \mathbb{E}\left(Y_1Y_2|X\right) - \mathbb{E}\left(Y_1|X\right)\mathbb{E}\left(Y_2|X\right)$$

以及**全协方差定律（law of total covariance）**：

$$\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2|X\right)\right] + \mathbb{C}\left[\mathbb{E}\left(Y_1|X\right), \mathbb{E}\left(Y_2|X\right)\right]$$

条件不相关

- 如果$\mathbb{C}(Y_1, Y_2|X) = 0$，可以称$Y_1$和$Y_2$给定$X$**条件不相关（conditionally uncorrelated）**，记为$Y_1 \perp Y_2|X$。
  - 条件不相关意味着在X相同的条件下，Y_1, Y_2之间是不相关的;
  - 然而即使$Y_1 \perp Y_2|X$，$\mathbb{C}[\mathbb{E}(Y_1|X), \mathbb{E}(Y_2|X)]$也可能不为0，从而条件不相关并不意味着不相关。

条件不相关

条件不相关与不相关

如果假设一个学习中同学的数学成绩$Y_1 = g(X) + Z_1$，物理成绩$Y_2 = f(X) + Z_2$，其中X为同学的努力程度，而$(Z_1, Z_2) \perp\!\!\!\perp X$为卷面成绩的随机干扰，且$Z_1 \perp Z_2$，那么

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1Y_2|X) &= \mathbb{E}[(g(X) + Z_1)(f(X) + Z_2)|X] \\ &= \mathbb{E}[g(X)f(X) + g(X)Z_2 + Z_1f(X) + Z_1Z_2|X] \\ &= g(X)f(X) + g(X)\mathbb{E}(Z_2) + f(X)\mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_1Z_2)\end{aligned}$$

同时

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y_1|X)\mathbb{E}(Y_2|X) &= [g(X) + \mathbb{E}(Z_1|X)][f(X) + \mathbb{E}(Z_2|X)] \\ &= [g(X) + \mathbb{E}(Z_1)][f(X) + \mathbb{E}(Z_2)]\end{aligned}$$

条件不相关

条件不相关与不相关

从而

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2|X\right) &= \mathbb{E}\left(Y_1Y_2|X\right) - \mathbb{E}\left(Y_1|X\right)\mathbb{E}\left(Y_2|X\right)\\ &= \mathbb{E}\left(Z_1Z_2\right) - \mathbb{E}\left(Z_1\right)\mathbb{E}\left(Z_2\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{C}\left(Y_1, Y_2|X\right)\right] + \mathbb{C}\left[\mathbb{E}\left(Y_1|X\right), \mathbb{E}\left(Y_2|X\right)\right]\\ &= \mathbb{C}\left[g\left(X\right) + Z_1, f\left(X\right) + Z_2\right]\\ &= \mathbb{C}\left(g\left(X\right), f\left(X\right)\right)\end{aligned}$$

通常不为0。按照这个设定，数学和物理成绩的相关性完全是由共同的努力程度X导致的，然而如果给定一些同学的努力程度一样，其数学和物理成绩就不相关了。

条件协方差矩阵

条件协方差矩阵

令$Y=[Y_1,...,Y_K]'$为随机向量，条件协方差矩阵可以定义为

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y|X) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[Y-\mathbb{E}(Y|X)|X\right]\mathbb{E}\left[Y-\mathbb{E}(Y|X)|X\right]'\right\}\\ &= \mathbb{E}\left(YY'|X\right)-\mathbb{E}(Y|X)\left(Y'|X\right)\\ &= \begin{bmatrix}\mathbb{V}(Y_1|X) & \mathbb{C}(Y_1,Y_2|X) & \cdots & \mathbb{C}(Y_1,Y_n|X)\\ \mathbb{C}(Y_2,Y_1|X) & \mathbb{V}(Y_2|X) & \cdots & \mathbb{C}(Y_2,Y_n|X)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbb{C}(Y_n,Y_1|X) & \mathbb{C}(Y_n,Y_2|X) & \cdots & \mathbb{V}(Y_n|X)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

条件分布

- 如果对于随机向量$[Y, X']'$，我们记指示函数$\mathbb{1}_A(X) = \mathbb{1}\{X \in A\}$，这是一个随机变量$X$的函数，因而

$$\mathbb{E}(Y \cdot \mathbb{1}_A(X)) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y\mathbb{1}_A(X)|X)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)\mathbb{E}(Y|X)]$$

- 若$X, Y \in \mathbb{Z}$是离散型随机变量，那么我们令$A = \{x\}$，有

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y \cdot \mathbb{1}\{X = x\}) &= \mathbb{E}[\mathbb{1}\{X = x\}\mathbb{E}(Y|X)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}\{X = x\}\mathbb{E}(Y|X = x)] \\ &= \mathbb{E}(Y|X = x) \cdot P(X = x)\end{aligned}$$

条件概率质量函数

- 从而

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Y|X=x\right)=h_0\left(x\right)&=\frac{\mathbb{E}\left(Y\cdot\mathbb{1}\left\{X=x\right\}\right)}{P\left(X=x\right)}\\&=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left[k\cdot P\left(Y=k,X=x\right)\right]}{P\left(X=x\right)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{P\left(Y=k,X=x\right)}{P\left(X=x\right)}\end{aligned}\tag{1}$$

条件概率质量函数

- 如果记

$$P(Y=k|X=x)=\frac{P(Y=k,X=x)}{P(X=x)}$$

可以验证$P(Y=k|X=x)\geq 0$且

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=k|X=x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{P(Y=k,X=x)}{P(X=x)}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=k,X=x)}{P(X=x)}=1$$

从而$P(Y=k|X=x)$是一个概率质量函数，我们称其为**条件概率质量函数（conditional probability mass function）**。

条件密度

- 对于连续型随机向量(X,Y)，可以证明

$$\mathbb{E}\left(Y|X=x\right)=h_0\left(x\right)=\frac{\int_{\mathbb{R}}yf\left(x,y\right)dy}{f_X\left(x\right)}=\int_{\mathbb{R}}y\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}dy \tag{2}$$

  - 由于$\mathbb{E}\left[Y-\mathbb{E}\left(Y|X\right)\right]=0$，从而

$$\int_{\mathbb{R}}\left[y-h_0\left(x\right)\right]f\left(x,y\right)dy=0$$

  - 固定x，那么以上条件意味着

$$\int_{\mathbb{R}}yf\left(x,y\right)dy=h_0\left(x\right)\int_{\mathbb{R}}f\left(x,y\right)dy=h_0\left(x\right)f_X\left(x\right)$$

条件密度

条件密度函数

- 如果记

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy}$$

- 可以验证$f_{Y|X}(y|x) > 0$且

$$\int_{\mathbb{R}} f_{Y|X}(y|x)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x,y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy}dy = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy} = 1$$

从而$f_{Y|X}(y|x)$也是一个密度函数。

- 我们把$f_{Y|X}(y|x)$定义为**条件密度函数（conditional denstiy function）**。

条件密度函数

- 无论对于离散型随机变量还是连续型随机变量，或者他们的混合，不失一般性我们将条件概率质量函数和条件密度函数统称为条件密度函数$f_{Y|X}(y|x)$。
- 根据式(1)和式(2)，条件期望可以通过

$$\mathbb{E}(Y|X=x)=\int_{\mathbb{R}} y\cdot f_{Y|X}(y|x)\,dy$$

进行计算，即使用条件密度计算的期望即条件期望。

条件分布函数

条件分布函数

对于随机向量$[Y, X']'$，条件分布函数定义为

$$F_{Y|X}(y|x) = P(Y \leq y|X = x) = \mathbb{E}(\mathbb{1}\{Y \leq y\}|X = x)$$

- 如果给定$X = x$，Y的分布函数为$F_{Y|X}$，我们称Y给定X的条件分布为$F_{Y|X}$，记为$Y|X \sim F_{Y|X}$。
- 而对应于$F_{Y|X}$的密度（质量）函数就是条件密度（质量）函数。
- 比如，$M|N \sim \text{Bi}(N, p)$即条件分布：给定人数为N的情况下，M的分布为二项分布。
- 注意条件分布与无条件分布的区别，条件分布与无条件分布可以是完全不同的两个分布！

条件分布与无条件分布

银行人数的无条件分布

$M|N \sim \mathrm{Bi}(N,p)$，$N \sim \mathrm{P}(\lambda)$，如果计算$M$的无条件分布，根据条件概率质量函数定义，有

$$
\begin{aligned}
P(M=m) &= \sum_{n=m}^{\infty} P(M=m|N=n)\cdot P(N=n) \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) p^m (1-p)^{n-m} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \frac{p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} (1-p)^{n-m} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{h=0}^{\infty} (1-p)^h \frac{\lambda^{h+m}}{h!} \\
&= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{h=0}^{\infty} (1-p)^h \frac{\lambda^h}{h!}
\end{aligned}
$$

条件分布与无条件分布

银行人数的无条件分布

根据$e^{\lambda x}$在$x=0$处的泰勒展开

$$e^{\lambda x}=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\lambda^h}{h!}x^h$$

将$x=1-p$带入，得到

$$e^{\lambda(1-p)}=\sum_{h=0}^{\infty}(1-p)^h\frac{\lambda^h}{h!}$$

带入得到

$$P(M=m)=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m}{m!}e^{-\lambda p}$$

从而无条件分布$M\sim \mathrm{P}(\lambda p)$。

独立与均值独立

- 如果随机变量X和Y是独立的，那么

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x) \cdot f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$

即两个随机变量独立的充要条件是$f_{Y|X} = f_Y$。

- 在独立的条件下：

$$\mathbb{E}(Y|X) = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_{Y|X}(y|x)\, dy = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f_Y(y)\, dy = \mathbb{E}(Y)$$

因而如果随机变量X和Y是独立的，那么其一定是均值独立的。

- 反之则不成立。比如$Y|X \sim \mathrm{N}(0, X^2)$，即使$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) = 0$，但是$\mathbb{V}(Y|X) = X^2 \neq \mathbb{V}(Y)$，然而独立性一定要求$\mathbb{V}(Y|X) = \mathbb{V}(Y)$，从而均值独立推不出独立。

独立与均值独立

独立、均值独立、不相关的强弱关系

$$X \perp\!\!\!\perp Y \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y) \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} X \perp Y$$

条件密度函数

四面骰子

四面骰子的例子中，其条件密度可以如下计算：

$Z\backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	0
3	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	0
4	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
$f_{Y\|Z}(y\|Z=1)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	0	
$f_{Y\|Z}(y\|Z=2)$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	

条件密度函数

二元正态分布

对于联合正态

$$(X,Y)' \sim \mathrm{N}\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

密度函数:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\}$$

其中$-1 < \rho < 1$为X, Y的相关系数。

条件密度函数

四面骰子

其边际密度函数为:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \\
&\cdot \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(1-\rho^2)(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}-\frac{\rho(x-\mu_X)}{\sigma_X}\right)^2\right]\right\} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}
\end{aligned}
$$

或者$X \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$

条件密度函数

四面骰子

其条件密度函数为:

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_Y-\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)}{\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\left[\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)\right]}{\sigma_Y\sqrt{(1-\rho^2)}}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

或者$Y|X \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho^2)\right)$，也服从正态分布，进而:

- 条件期望$\mathbb{E}(Y|X=x) = \mu_Y+\rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$
- 条件方差$\mathbb{V}(Y|X) = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$。

贝叶斯公式

- 使用条件密度函数的定义，我们还可以得到随机变量的贝叶斯公式。
- 由于：$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) \cdot f_{X|Y}(x|y)$从而条件密度：

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy} \\
&= \frac{f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X|Y}(x|y) \cdot f_Y(y)\,dy}
\end{aligned}
$$

以上方程即随机变量的**贝叶斯公式**，在贝叶斯统计中有大量的应用。

条件分布与统计模型

- 统计模型通常研究几个随机变量的联合分布，如$F(X,Y)$
- 经常我们不需要对联合分布进行建模，而是通过条件分布对联合分布进行建模。由于：

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x)$$

因而我们可以通过对X的边缘分布以及$Y|X$的条件分布对X,Y的联合分布进行建模。

- 比如，分层模型（hierarchical model）就通过分层次的假设条件分布对数据的分布进行建模。
- 有时X的边缘分布不是关注的核心问题，甚至可能只对$Y|X$的边缘分布进行建模。

高斯混合模型

高斯混合模型

如果我们关注某一项疾病指标X，该指标对于患者和健康人群具有不同的分布。记$D=1$为患者，$D=0$为健康人群，记患者该项指标为X_1，健康人群该项指标为X_0，假设：

$$\begin{cases} X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \\ X_0 \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma_0^2\right) \end{cases}$$

即分别假设了患者和健康人群该项指标的分布，那么观察到的指标：$X = DX_1 + (1-D)X_0$。该模型可以写为：

$$\begin{cases} X|D=1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \\ X|D=0 \sim \mathrm{N}\left(\mu_0, \sigma_0^2\right) \\ D \sim \mathrm{Ber}\left(p\right) \end{cases}$$

高斯混合模型

高斯混合模型

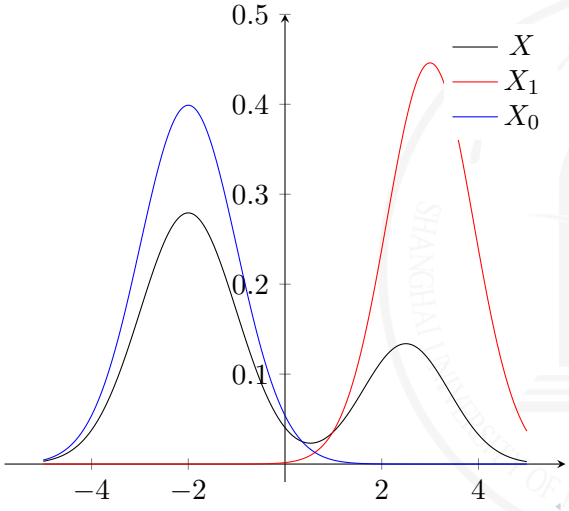
为了得到X的密度函数，注意到：

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = \mathbb{E}[\mathbb{1}(X \leq x)] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[\mathbb{1}(X \leq x)|D]\} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}(X \leq x)|D=1] \cdot P(D=1) \\ &+ \mathbb{E}[\mathbb{1}(X \leq x)|D=0] \cdot P(D=0) \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) \cdot p + \Phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0}\right) \cdot (1-p) \end{aligned}$$

从而：

$$\begin{aligned} f_X(x) &= p\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) + (1-p)\frac{1}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0}\right) \\ &= p f_{X_1}(x) + (1-p) f_{X_0}(x) \end{aligned}$$

高斯混合模型



高斯混合模型

高斯混合模型

我们可以使用条件期望计算X的期望:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|D)] = \mathbb{E}\{\mathbb{E}[DX_1 + (1-D)X_0|D]\} \\ &= \mathbb{E}\{D\mathbb{E}(X_1|D) + (1-D)\mathbb{E}(X_0|D)\} \\ &= \mathbb{E}\{D\mu_1 + (1-D)\mu_0\} \\ &= \mu_1\mathbb{E}(D) + \mu_0\mathbb{E}(1-D) \\ &= p\mu_1 + (1-p)\mu_0\end{aligned}$$

高斯混合模型

高斯混合模型

此外，如果我们观察到了X，也可以使用贝叶斯公式计算其患病的概率：

$$
\begin{aligned}
f_{D|X}(d=1|x) &= \frac{f_{X|D}(x|d=1)\, f_D(d=1)}{\int_{\mathbb{R}} f_{X|D}\left(x|\tilde{d}\right) f_D(d)\, d\tilde{d}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) p}{\frac{1}{\sigma_1}\phi\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) p + \frac{1}{\sigma_0}\phi\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma_0}\right)(1-p)}
\end{aligned}
$$

迭代期望公式

- 条件期望可以很方便的扩充到多个X的情形，比如$\mathbb{E}(Y|X_1,X_2)$可以定义为：

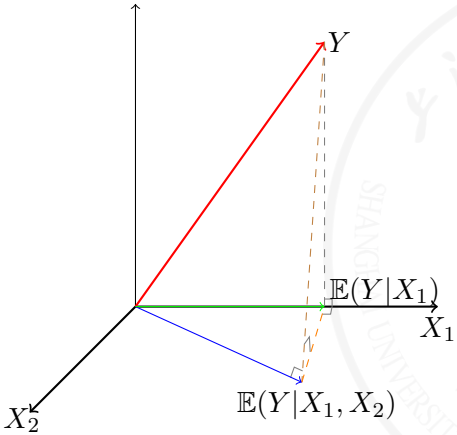
$$\mathbb{E}(Y|X_1,X_2)=h_0(X_1,X_2)=\arg\min_{h\in L^2}\left\{\mathbb{E}\left[(Y-h(X_1,X_2))^2\right]\right\}$$

- 条件期望有如下性质（**迭代期望公式，law of iterated expectation**）：

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(Y|X_1,X_2)|X_1\right]=\mathbb{E}(Y|X_1)$$

即如果我们对随机变量Y，先在大的空间上投影，再在这个大的空间上的一个小的子空间上进行投影，与直接在这个小的空间上进行投影是相等的。

迭代期望公式



条件期望

条件期望与$\sigma-$代数

在四面骰子的例子中，随机变量Z可能取值为：$\{1,2,3,4\}$，因而：

$$\begin{aligned}\sigma\langle Z\rangle = \sigma\left\langle Z^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\right\rangle = \\ \sigma < \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}, \\ \{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(4,2)\}, \\ \{(3,3),(3,4),(4,3)\},\{(4,4)\} >\end{aligned}$$

例如，如果我们只知道$Z=3$，我们知道实际发生的情况应该是$\{(3,3),(3,4),(4,3)\}$中的某一种。因而如果给定$Z=3$，我们把之前的16种情况降低到了3种情况。如果我们对Y，即两个骰子的和感兴趣，如果我们没有任何信息，那么我们对Y的最优预测应该是$\mathbb{E}(Y)=5$。而如果我们观察到了$Z=3$，那么此时最优预测应该为$\mathbb{E}(Y|Z=3)=\frac{6+7+7}{3}=\frac{20}{3}$。

条件期望

条件期望与$\sigma-$代数

- 在上例中，Z总共有4种可能的取值，在每种Z的可能取值的情况下，都可以把16种情况降低为更少的情况，因而增大了信息量。
- 而如果我们使用随机变量Y，Y共有7种可能的取值，给定Y也会增大我们的信息量。
- 而如果给定(Z,Y)两个随机变量，可以更加细分为10种情况，我们可以得到

$$\sigma\langle Z\rangle \subset \sigma\langle Z,Y\rangle, \sigma\langle Y\rangle \subset \sigma\langle Z,Y\rangle$$

即两个随机变量提供了比单独一个随机变量更多的信息。

  - 例如，如果我们不仅仅观察到$Z=3$，还观察到$Y=7$，那么我们此时知道，实际发生的情况应该是$\{(3,4),(4,3)\}$两种情况下的一种，比只观察到Z时更加准确。

条件期望定义

因而我们通常把条件期望的概念推广到$\sigma-$代数上。对于概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$，我们可以对$\mathscr{F}$的一个子$\sigma-$代数$\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$定义条件期望如下：

条件期望

对于概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$，$\mathcal{I} \subset \mathscr{F}$为一个$\sigma-$代数，对于随机变量$Y$满足：$\mathbb{E}(|Y|) < \infty$，如果对于任意的$A \in \mathcal{I}$，随机变量$H$满足：

$$\mathbb{E}(Y \cdot \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(H \cdot \mathbb{1}_A)$$

那么我们称H为给定$\mathcal{I}$随机变量Y的条件期望，记为$\mathbb{E}(Y|\mathcal{I})$。令$B \in \mathscr{F}$，定义$\mathscr{P}(B|\mathcal{I}) = \mathbb{E}(1_B|\mathcal{I})$为条件概率。

迭代期望公式

- 注意以上定义的$\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y|\sigma\langle X\rangle)$。
- 特别的，令$\mathcal{I} = \{\emptyset, \Omega\}$，$\mathbb{E}(Y|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbb{E}(Y)$，即信息量最小的条件期望即为期望本身。
- 而以上的迭代期望公式也可以相应推广，即如果$\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_2 \subset \mathscr{F}$，那么：

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{I}_1) = \mathbb{E}\{[\mathbb{E}(Y|\mathcal{I}_2)]|\mathcal{I}_1\}$$

即先在大的信息集上做投影，再将其投影到小的信息集上，等价于直接投影在小的信息集上。

作业

- 3.2, 3.4, 3.7, 3.9, 3.12, 3.15, 3.18