

# 面板数据

司继春

2024年12月







# 不可观测异质性

- 为了识别以上模型，一个非常常用的假设是假设 $\alpha_{it}$ 可以被分解为可加的两部分：

$$\alpha_{it} = \alpha_i + \lambda_t$$

得到

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda_t + x'_{it}\beta + u_{it}$$

其中 $\alpha_i$ 为不随时间变化 (time-invariant) 的个体效应 (individual effects) 或者个体异质性 (individual heterogeneity) ，而 $\lambda_t$ 则代表了不同时间截距项的不同，也就是时间异质性。



# 时间固定效应

- 对于 $\lambda_t$ ，一种处理方法是直接设定 $t$ 的函数形式，比如线性趋势：

$$\lambda_t = \lambda t$$

或者二次趋势：

$$\lambda_t = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$$

等。

- 然而这些设定都有很强的函数形式假定：对于任意的非线性的、偶发的冲击都无法很好的建模。

# 时间固定效应

- 由于我们在这里假设短面板数据，面临的是 $T$ 固定但是 $N \rightarrow \infty$ 的情况，因而 $\lambda_t$ 通常比较容易处理，可以直接通过引入时间固定效应（time fixed effects），即当前观测属于哪一期的虚拟变量来解决。
- 在引入了时间固定效应后，所有的不随个体 $i$ 而变化的变量（比如国家的GDP、利率等）都与 $\lambda_t$ 共线，从而不能再加入到回归方程中。
- 不失一般性，我们通常将时间固定效应 $\lambda_t$ 看做是 $x_{it}$ 中的一部分，因而我们可以将模型写为

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

其中现在的 $x_{it}$ 中包含着时间固定效应 $\lambda_t$ 。



# 面板的向量形式

- 接下来，在本章中，我们都以

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

为基础进行讨论。

- 为了方便起见，我们通常记

$$X_i = \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ \vdots \\ x'_{iT} \end{bmatrix}_{T \times K}, Y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix}_{T \times 1}, U_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix}_{T \times 1}$$

从而上式可以写为

$$Y_i = \alpha_i + X_i\beta + U_i$$

由于 $T$ 的固定的，从而以上 $X_i, Y_i, U_i$ 的维数都是固定的。



## 两种不同的模型

- 虽然对于时间固定效应 $\lambda_t$ 的处理相对简单，然而，由于 $N \rightarrow \infty$ ，对 $\alpha_i$ 的处理相对困难。
- 注意 $\alpha_i$ 也是一个随机变量，根据对 $\alpha_i$ 的假设不同，通常来讲有两类不同的模型可以使用：
  - 随机效应 (random effects) 模型
  - 固定效应 (fixed effects) 模型
- 两者的关键区别在于 $\alpha_i$ 与解释变量 $x_{it}$ 之间相关性假设。在介绍两种方法之前，我们首先介绍使用传统的最小二乘法及其所需要的假设。



# 外生性假设

根据之前OLS一致性的讨论，为了使得一致性成立，我们需要假设 $\mathbb{E}(v_{it}|x_{it}) = 0$ ，而为了保证 $\mathbb{E}(v_{it}|x_{it}) = 0$ 成立，我们通常将其分解为两个单独的假设：

**当期外生性， contemporaneous exogeneity**

假设对于所有的 $i, t$ ，有 $\mathbb{E}(u_{it}|x_{it}) = 0$ 。

以及：

**个体异质性的外生**

假设对于所有的 $i$ ，有 $\mathbb{E}(\alpha_i|X_i) = 0$ 。

# 外生性假设

- 注意以上仅仅假设了当期的 $u_{it}$ 和当期的 $x_{it}$ 不相关
- 但是由于不可观测的个体异质性 $\alpha_i$ 出现在了每一期的方程中，因而需要 $\alpha_i$ 和所有期的 $x_{it}$ 都不相关，可以简写为 $\alpha_i$ 和 $X_i$ 不相关。
- 由于本章中主要考虑个体异质性 $\alpha_i$ 的问题，因而我们暂且忽略 $u_{it}$ 与 $x_{it}$ 的相关性。
- 当然在实证中，如果 $u_{it}$ 与 $x_{it}$ 相关，那么这种外生性的违背是需要重点考虑的。

# POLS

- 注意在这里虽然我们将解释变量 $x_{it}$ 的下角标写成 $it$ ，但是在实际应用时，仍然需要加入那些个体 $i$ 的随时间不变的特征 $\tilde{x}_i$
- 由于在模型中加入了时间固定效应，所以所有的不随个体变化、只随时间变化的变量都可以忽略，然而我们没有加入个体 $i$ 的固定效应，所以那些不随时间变化的个体特征（如性别等）仍然不与其他任何解释变量共线，需要被加入到模型中。
- 否则，这些不随时间变化的个体特征会进入到 $\alpha_i$ 从而误差项 $v_{it}$ 中，使其更容易与 $x_{it}$ 相关，从而外生性更难以满足。

# POLS

- 在以上假设条件下，我们可以将 $v_{it}$ 视为新的误差项，此时我们可以简单的使用OLS对其进行估计。
- 若以上假设成立：

$$\mathbb{E}(x_{it}v_{it}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(x_{it}v_{it} | x_{it})] = \mathbb{E}[x_{it}\mathbb{E}(\alpha_i + u_{it} | x_{it})] = 0$$

从而 $\mathbb{E}(v_{it}x_{it}) = 0$ ，由此得到矩条件：

$$\mathbb{E}[x_{it}(y_{it} - x'_{it}\beta)] = 0$$

得到

$$\beta = [\mathbb{E}(x_{it}x'_{it})]^{-1} \mathbb{E}(x_{it}y_{it})$$

# POLS

- 从而矩估计：

$$\begin{aligned}
 \hat{\beta}_{POLS} &= \left[ \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it}x'_{it}) \right]^{-1} \left[ \frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it}y_{it}) \right] \\
 &= \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it}x'_{it}) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it}y_{it}) \right] \\
 &= \left( \sum_{i=1}^N X'_i X_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N X'_i Y_i \right)
 \end{aligned}$$

以上估计方法实际上就是使用OLS直接进行估计，因而也被称为混合最小二乘法（pooled ordinary least squares, POLS）。

# POLS

如果记

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}_{NT \times K}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{NT \times 1}$$

那么POLS估计量可以写为：

$$\hat{\beta}_{POLS} = (X'X)^{-1} X'Y$$

从而获得POLS估计量的一个重要前提是 $(X'X)^{-1}$ 可逆。据此，我们可以引入如下识别条件：

## 识别条件

假设 $\mathbb{E}(X_i'X_i)$ 可逆。

# POLS统计性质

- 如果记 $V_i = \alpha_i + U_i$ ，那么回归式可以写为 $Y_i = X_i\beta + V_i$
- 将其带入到混合最小二乘的估计式中，有：

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{POLS} &= \left( \sum_{i=1}^N X_i' X_i \right)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^N X_i' (X_i\beta + V_i) \right] \\ &= \beta + \left( \sum_{i=1}^N X_i' X_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N X_i' V_i \right) \\ &= \beta + \left( \sum_{i=1}^N X_i' X_i \right)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} v_{it}) \right]\end{aligned}$$

# POLS统计性质

- 从而在外生性假设以及一定可积性条件下，根据大数定律，有：

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it}v_{it}) \xrightarrow{P} \mathbb{E} \left( \sum_{t=1}^T (x_{it}v_{it}) \right) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E} (x_{it}v_{it}) = 0$$

进而易得，POLS估计量为一致估计量。

- 进一步，由于

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' X_i \xrightarrow{P} \mathbb{E} (X_i' X_i) \\ \sqrt{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' V_i \overset{a}{\sim} N(0, \mathbb{V} (X_i' V_i)) \end{cases}$$

而其中  $\mathbb{V} (X_i' V_i) = \mathbb{E} (X_i' V_i V_i' X_i)$ ，从而

$$\sqrt{N} (\hat{\beta}_{POLS} - \beta) \overset{a}{\sim} N \left( 0, [\mathbb{E} (X_i' X_i)]^{-1} \mathbb{E} (X_i' V_i V_i' X_i) [\mathbb{E} (X_i' X_i)]^{-1} \right)$$

# POLS的标准误

- 为了估计混合最小二乘估计量的标准误，类比异方差稳健标准误的计算方法。
- 记  $\hat{V}_i = Y_i - X_i \hat{\beta}_{POLS}$  为个体  $i$  的残差向量，那么使用插入法：

$$\mathbb{V}(\widehat{\beta}_{POLS}) = (X'X)^{-1} \left[ \sum_{i=1}^N (X_i' \hat{V}_i \hat{V}_i' X_i) \right] (X'X)^{-1}$$

以上就得到了POLS估计系数的标准误的一致估计。注意其中：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (X_i' \hat{V}_i \hat{V}_i' X_i) &= \sum_{i=1}^N \left( \begin{bmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{v}_{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{i1} & \cdots & \hat{v}_{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ \vdots \\ x'_{iT} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T (\hat{v}_{it} \hat{v}_{is} x_{it} x'_{is}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\hat{v}_{it}^2 x_{it} x'_{it}) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1, s \neq t}^T (\hat{v}_{it} \hat{v}_{is} x_{it} x'_{is}) \end{aligned}$$

- 聚类标准误：至少聚类到个体  $i$  层面

# POLS实例

## 俄罗斯大选

在之前的例子中，我们展示了Enikolopov, Petrova和Zhuravskaya（2011）的截面数据分析结果，除此之外文章中还使用了如下的面板数据设定：

$$vote_{s,t} = \beta_0 + \beta_1 NTV_{s,t} + x'_{st}\beta + \lambda_t + \alpha_i + \epsilon_{s,t}$$

其中 $t = 1995, 1999$ ，即一个两年的面板数据， $s$ 为选区， $x_{st}$ 为其他控制变量。如果使用POLS对以上模型进行回归，那么可以使用如下代码：

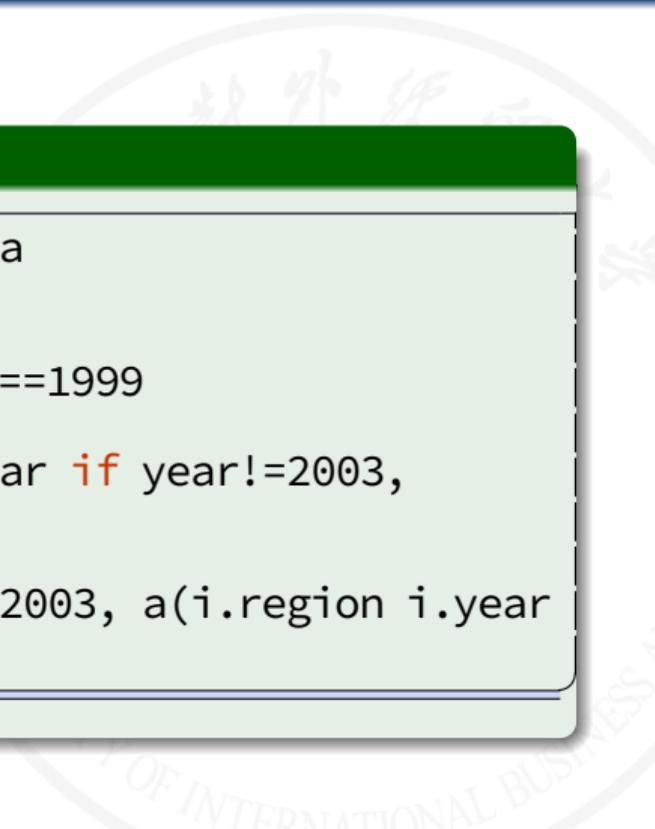


# POLS实例

## 俄罗斯大选

```

1 use datasets/NTV_Aggregate_Data_reshaped.dta
2 // 年1995并没有成立NTV
3 gen Watch_probit_p=0
4 replace Watch_probit_p=Watch_probit if year==1999
5 // 回归POLS
6 reg Votes_SPS_ Watch_probit_p i.region i.year if year!=2003,
   cluster(tik_id)
7 // reghdfe
8 reghefe Votes_SPS_ Watch_probit_p if year!=2003, a(i.region i.year
   ) cluster(tik_id)
    
```





# 随机效应的假设

## 协方差结构和外生性假设

假设：

1.  $\alpha_i$  具有同方差，即  $\mathbb{V}(\alpha_i | X_i) = \sigma_\alpha^2$
2.  $u_{it}$  具有同方差且无自相关，即假设  $\mathbb{V}(U_i | X_i) = \sigma_u^2 \cdot I_T$ 。
3.  $\mathbb{E}(\alpha_i u_{it} | X_i) = 0$

# 随机效应模型的协方差结构

- 在这里，我们将 $\alpha_i$ 视为一个均值独立于 $x_i$ 的随机变量，因而我们通常将该设定成为随机效应（random effects）模型。
- 根据以上假设，我们可以计算：

$$\begin{aligned} \Omega &= \mathbb{V}(V_i|X_i) = \mathbb{V}(\alpha_i + U_i|X_i) \\ &= \sigma_u^2 I_T + \sigma_\alpha^2 \iota_T \iota_T' \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因为有了 $\alpha_i$ 的存在， $\mathbb{C}(v_{it}, v_{is}) \neq 0$ ，从而存在了自相关

# 随机效应模型的估计

- 如果我们知道 $\Omega$ ，就可以得到最有效的估计量。
- 如果我们在方程的两边同时乘以 $\Omega^{-1/2}$ ，得到：

$$\Omega^{-1/2}Y_i = \Omega^{-1/2}X_i\beta + \Omega^{-1/2}V_i$$

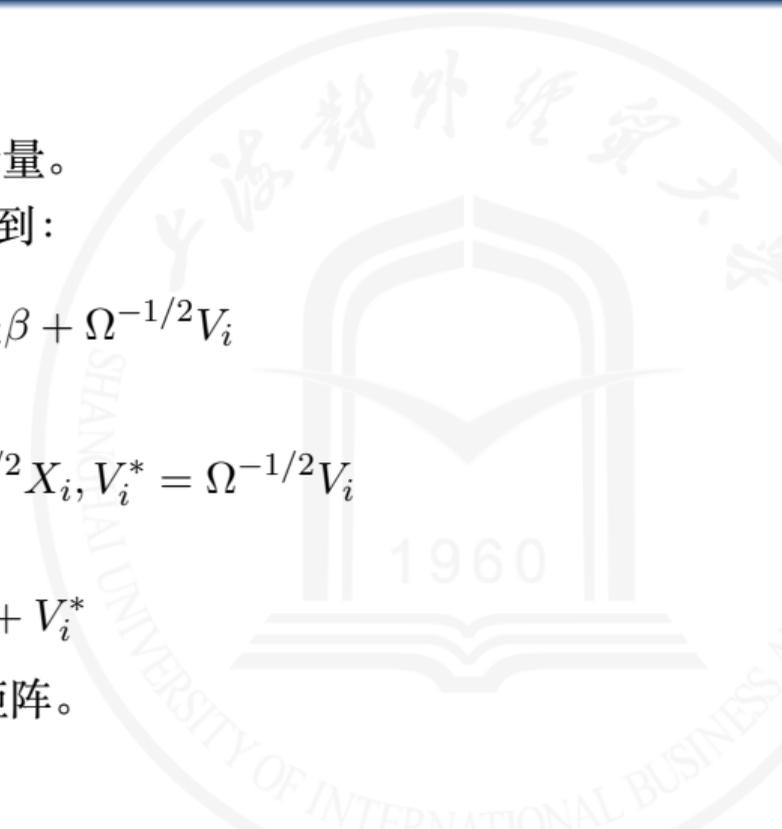
如果记

$$Y_i^* = \Omega^{-1/2}Y_i, X_i^* = \Omega^{-1/2}X_i, V_i^* = \Omega^{-1/2}V_i$$

那么以上方程可以写为：

$$Y_i^* = X_i^*\beta + V_i^*$$

其中 $Y_i^*$ 为 $T \times 1$ 的向量，而 $X_i^*$ 为 $T \times K$ 的矩阵。



# 随机效应模型的估计

- 此外，有：

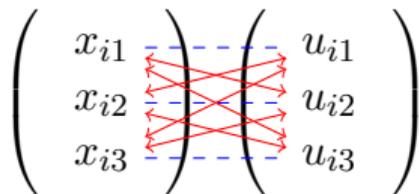
$$\mathbb{V}(V_i^*) = \mathbb{V}(\Omega^{-1/2}V_i) = \Omega^{-1/2}\Omega\Omega^{-1/2} = I$$

因而我们可以直接使用 $Y_i^*$ 对 $X_i^*$ 做OLS，得到：

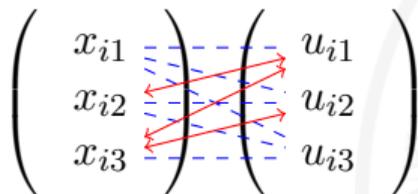
$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{GLS} &= \left( \sum_{i=1}^N X_i^{*'} X_i^* \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N X_i^{*'} Y_i^* \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} Y_i \right) \\ &= [X' (I_N \otimes \Omega^{-1}) X]^{-1} [X' (I_N \otimes \Omega^{-1}) Y] \end{aligned}$$



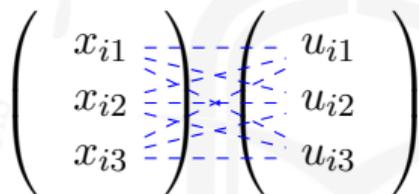
# 随机效应的假设



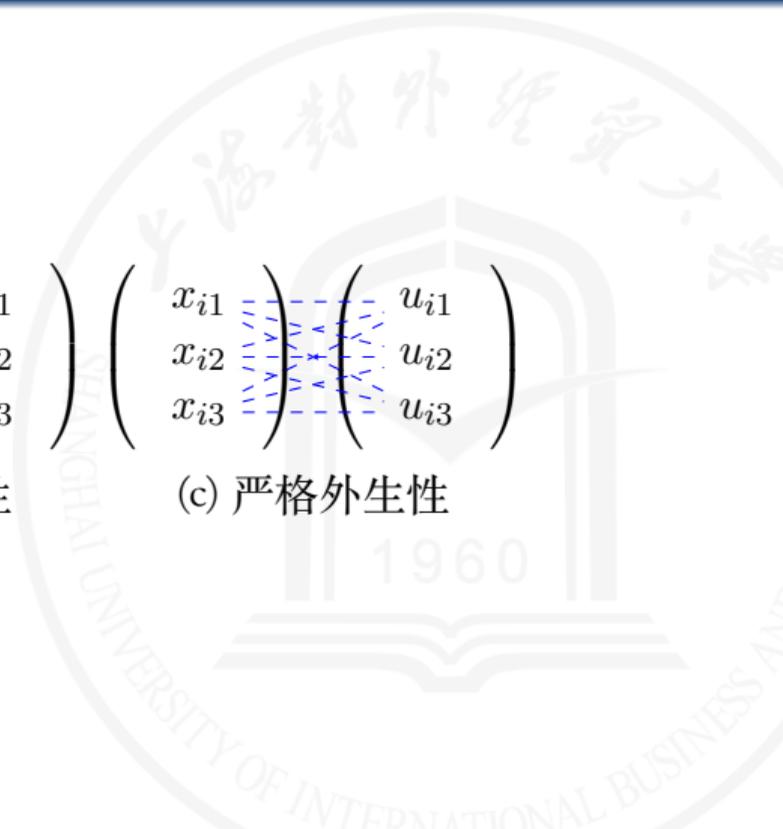
(a) 当期外生性



(b) 序贯外生性



(c) 严格外生性



# 序贯外生性

- 比当期外生性更加严格一点的是序贯外生性：

## 序贯外生性, sequential exogeneity

假设对于所有的  $i, t$ , 有  $\mathbb{E}(u_{it} | x_{it}, x_{i,t-1}, \dots, x_{i1}) = 0$ 。

- 上图(b)展示了序贯外生性。在当期外生性的基础上, 序贯外生性不仅要求当期的  $u_{it}$  与  $x_{it}$  不相关, 而且还额外要求  $u_{it}$  和过去的所有  $x_{it}$  ( $x_{it}, x_{i,t-1}, \dots, x_{i1}$ ) 都不相关。
- 注意此时我们允许  $u_{it}$  和未来的  $x$  ( $x_{i,t+1}, \dots, x_T$ ) 相关。
- 此时, 看起来好像  $x_{it}$  是由滞后的误差项 ( $u_{i,t-1}, \dots, u_1$ ) 所“决定”的, 我们称这些  $x$  为前定变量 (predetermined variables)。



# 严格外生性

- 以上使用了条件期望定义严格外生性，实际上在这里我们只需要一个稍微弱一点的假设：

## 严格外生性2

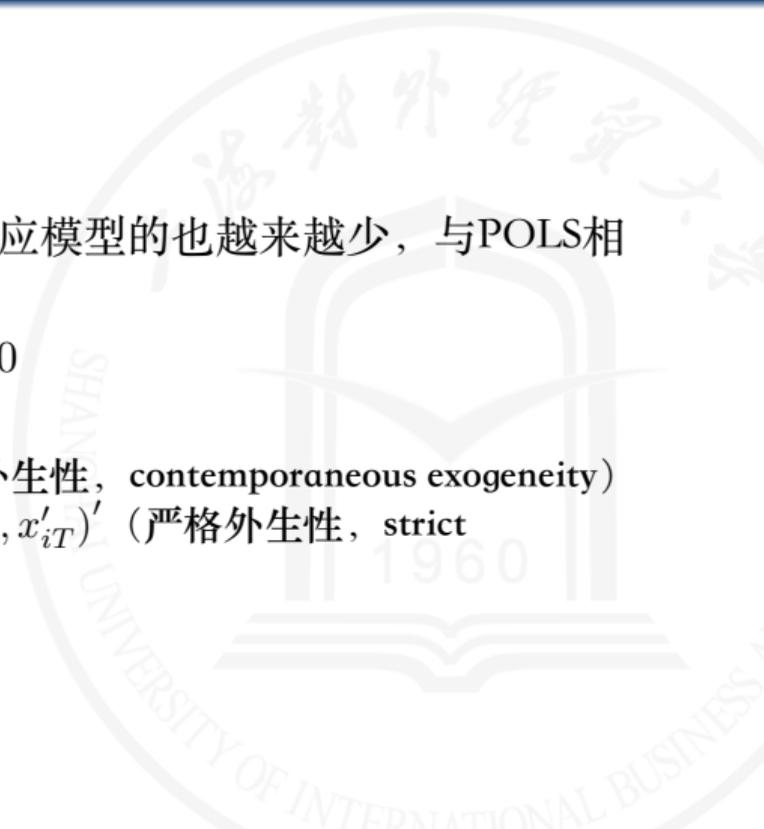
假设

$$\mathbb{E}(u_i \otimes X_i) = \mathbb{E} \begin{bmatrix} u_{i1} X_i \\ \vdots \\ u_{iT} X_i \end{bmatrix}_{T^2 \times K} = \mathbb{E} \begin{bmatrix} u_{i1} x'_{i1} \\ \vdots \\ u_{i1} x'_{iT} \\ \vdots \\ u_{iT} x'_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} x'_{iT} \end{bmatrix} = 0$$

# POLS v.s. RE

经常会看到，即使面板数据，文献中使用随机效应模型的也越来越少，与POLS相比，其在假设上有一点细微差别：

- 对 $\alpha_i$ 的假设上：两者都需要假设 $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$
- 对 $u_{it}$ 的假设上：
  - POLS只需要假设 $\mathbb{E}(u_{it}|x_{it}, \alpha_i) = 0$ （当期外生性，contemporaneous exogeneity）
  - RE需要假设 $\mathbb{E}(u_{it}|X_i, \alpha_i) = 0, X_i = (x'_{i1}, \dots, x'_{iT})'$ （严格外生性，strict exogeneity）



# 随机效应实例

## 俄罗斯大选

在俄罗斯大选的例子中，如果需要使用随机效应估计量，可以使用：

```
1 xtreg Votes_SPS_Watch_probit_p i.region i.year if year!=2003, re  
   cluster(tik_id)
```

其中xtreg命令为面板数据回归命令，而re选项则指定使用随机效应模型进行估计，此外，标准误被聚类到个体层次。

- 在xtreg命令中，robust选项与cluster(panel\_id)是等价的，由于该例该面板本身为选区层面面板，此时使用cluster(tik\_id)与直接加入robust选项是等价的。
- 但是在其他命令如reg、reghdfe等并没有这一设定，仍然需要手动使用cluster()进行聚类。





# 一阶差分方法

- 为了处理可能的 $\alpha_i$ 与 $X_i$ 之间的相关性，一个更加聪明的办法是想办法在回归方程中将 $\alpha_i$ 消掉，从而可以完全无需对 $\alpha_i$ 和 $X_i$ 之间的关系进行建模。
- 将 $\alpha_i$ 消掉最简单的做法是直接对回归方程式

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

进行一阶差分（first difference），从而得到

$$\Delta y_{it} = \Delta x'_{it}\beta + \Delta u_{it}$$

其中 $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1}$ 为一阶差分，其他类似。

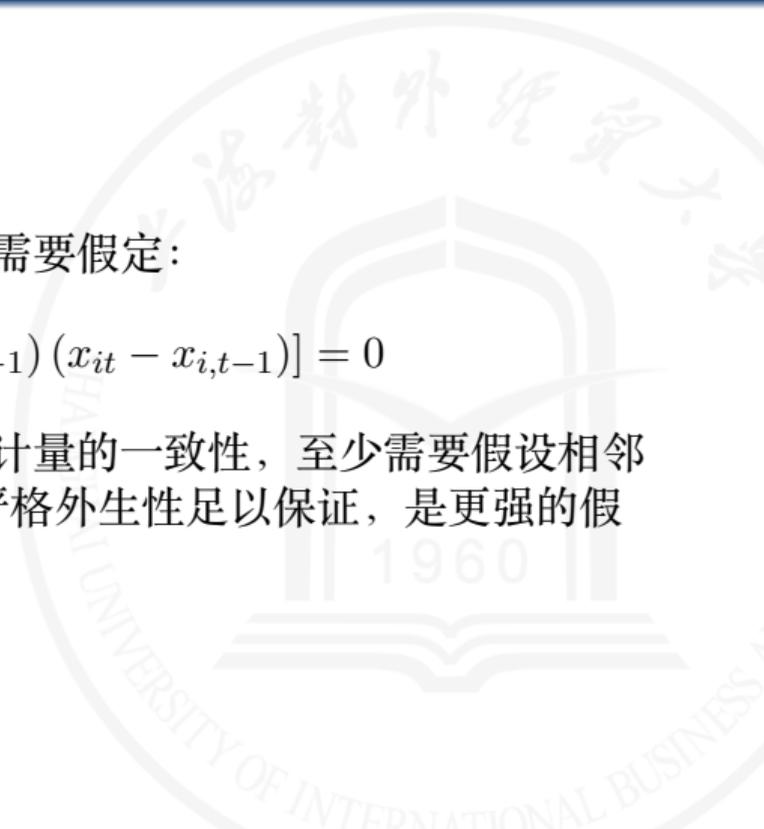
- 由于 $\alpha_i$ 是不随时间变化而变化的，所以经过一阶差分之后，自然消掉了 $\alpha_i$ ，从而也就无需考虑 $\alpha_i$ 与 $x_{it}$ 之间的相关性。
- 当然，解释变量中不随时间变化的所有特征也被一阶差分所消掉，所以使用该方法时， $x_{it}$ 中将不能包含不随时间而变化的解释变量。

# 一阶差分方法

- 为了使得以上方程可以通过OLS直接估计，需要假定：

$$\mathbb{E}(\Delta u_{it} \Delta x_{it}) = \mathbb{E}[(u_{it} - u_{i,t-1})(x_{it} - x_{i,t-1})] = 0$$

- 因而序贯外生性等假设并不足以保证OLS估计量的一致性，至少需要假设相邻两期的 $u_{it}$ 与 $x_{it}$ 之间不相关才可以，当然，严格外生性足以保证，是更强的假设。



# 一阶差分的应用

## 美国媒体与选举

Gentzkow, Shapiro and Sinkinson(2011)研究了美国各县的报纸数量对美国选举投票率的影响。由于考虑到数据中冲击具有较强的持续性影响，从而选择了一阶差分模型，其模型设定为：

$$y_{ct} = \beta \times n_{ct} + x'_{ct}\delta + \alpha_c + \gamma_{st} + \epsilon_{ct}$$

其中 $y_{ct}$ 为 $c$ 县 $t$ 年的总统选举投票率， $n_{ct}$ 为报纸数量， $\alpha_c$ 为县固定效应，而 $\gamma_{ct}$ 为州 $\times$ 年份固定效应。经过一阶差分后，得到：

$$\Delta y_{ct} = \beta \times \Delta n_{ct} + \Delta x'_{ct}\delta + \Delta \gamma_{ct} + \Delta \epsilon_{ct}$$

经过一阶差分后使用线性回归即可。（linear\_panel\_fd\_np.do）



# LSDV

- 注意到回归方程式中将 $\alpha_i$ 视为个体固定效应：

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

如果使用最小二乘回归，等价于：

- 使用将 $x_{it}$ 对 $N$ 个虚拟变量 $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ 做回归，得到残差。根据之前的结论，该残差为 $\ddot{x}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i$ 其中 $\bar{x}_i$ 为第 $i$ 个个体的所有时间段的 $x$ 的平均值： $\bar{x}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it}$ 以上过程即每个观测减去个体的平均，也成为去平均 (demean) ；
- 使用 $y_{it}$ 对 $N$ 个虚拟变量 $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ 做回归，得到残差。根据之前的结论，该残差为： $\ddot{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ 即被解释变量去平均；
- 使用OLS进行估计：

$$\hat{\beta}_{LSDV} = \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it} \ddot{x}'_{it} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it} \ddot{y}_{it} \right)$$

# 固定效应

- 实际上，以上估计量也可以由如下步骤得到：

1. 对于回归方程式  $y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$  按照时间进行平均，得到：

$$\bar{y}_i = \alpha_i + \bar{x}'_i\beta + \bar{u}_i$$

2. 相减，得到：

$$y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)' \beta + (u_{it} - \bar{u}_i)$$

从而减去了个体异质性  $\alpha_i$

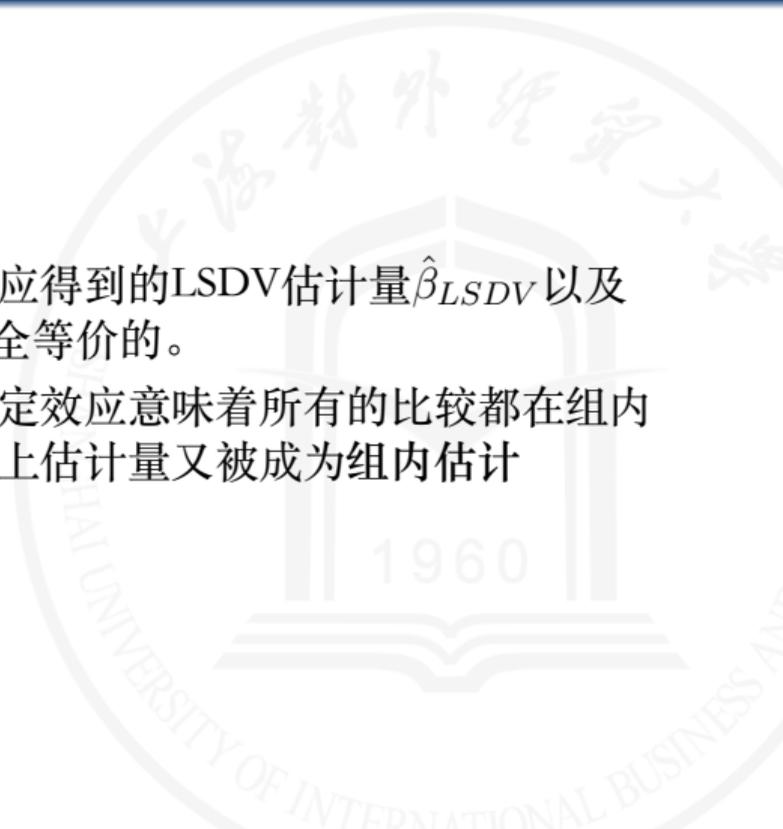
3. 使用  $\check{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$  对  $\check{x}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i$  做回归，得到估计量：

$$\hat{\beta}_{FE} = \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \check{x}_{it} \check{x}'_{it} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \check{x}_{it} \check{y}_{it} \right)$$

- 传统上，在定义以上估计量时，通常将  $\alpha_i$  视为固定的、不随机的参数，因而也被成为固定效应（fixed effects）模型。

# 固定效应

- 可见，以上两种方法：通过加入个体固定效应得到的LSDV估计量 $\hat{\beta}_{LSDV}$ 以及通过去平均得到的固定效应估计量 $\hat{\beta}_{FE}$ 是完全等价的。
- 实际上，根据我们之前的结论，加入个体固定效应意味着所有的比较都在组内（个体内部的不同时间之间）进行，因而以上估计量又被成为组内估计量（within-group estimator）。



# 固定效应统计性质

- 记  $M_0^T = I - \frac{1}{T} \iota_T \iota_T'$ , 那么:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{FE} &= \left( \sum_{i=1}^N \ddot{X}'_i \ddot{X}_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{X}'_i \ddot{Y}_i \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^N X'_i M_0^T X_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N X'_i M_0^T Y_i \right) \\ &= \beta + \left( \sum_{i=1}^N X'_i M_0^T X_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N X'_i M_0^T U_i \right) \end{aligned}$$

- 由于  $M_0^T$  不是对角阵, 因而此时, 我们需要严格外生性此时, 有:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X'_i M_0^T U_i \xrightarrow{p} \mathbb{E} (X'_i M_0^T U_i) = 0$$

从而一致性满足

# 固定效应的应用

## 俄国选举与NTV

在上面俄国选举的例子中，作者还额外使用1995年的选举结果进行了比对，其模型设定如下：

$$vote_{st} = \beta_0 + \beta_1 NTV_{st} + \delta_t + \alpha_s + \epsilon_{st}$$

由于以上只有两期，实际上以上做法与一阶差分是等价的。

(linear\_panel\_fe\_ntv.do)

## 可用的variation

- 组内估计量：估计

$$\dot{y}_{it} = \dot{x}'_{it}\beta + \dot{u}_{it}$$

得到 $\hat{\beta}^{WG}$

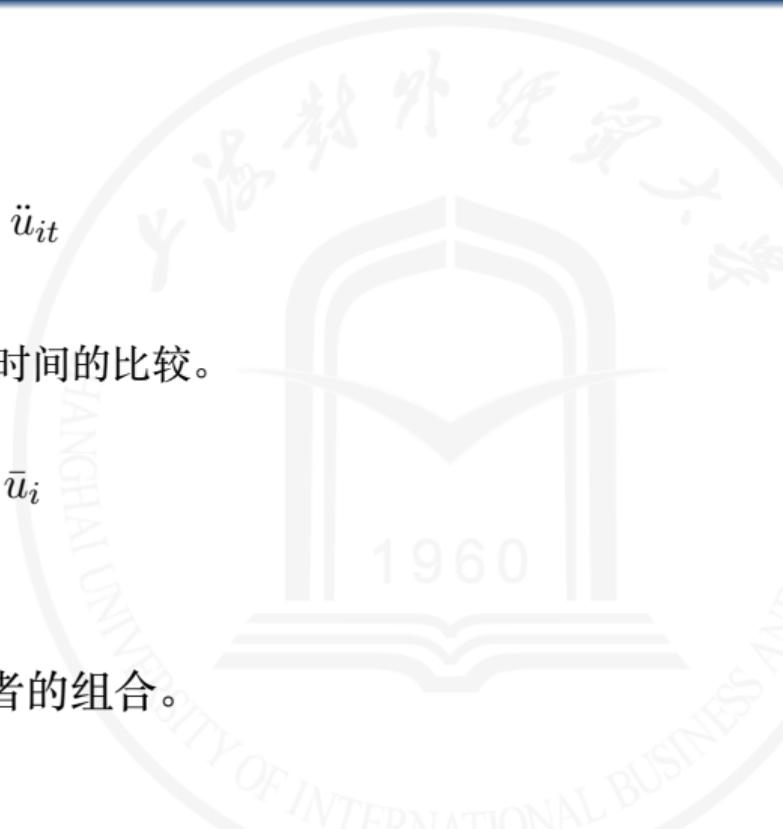
- 等价于LSDV，因而只包含了同一个体不同时间的比较。

- 组间估计量：估计

$$\bar{y}_i = \bar{x}'_i\beta + \bar{u}_i$$

得到 $\hat{\beta}^{BG}$

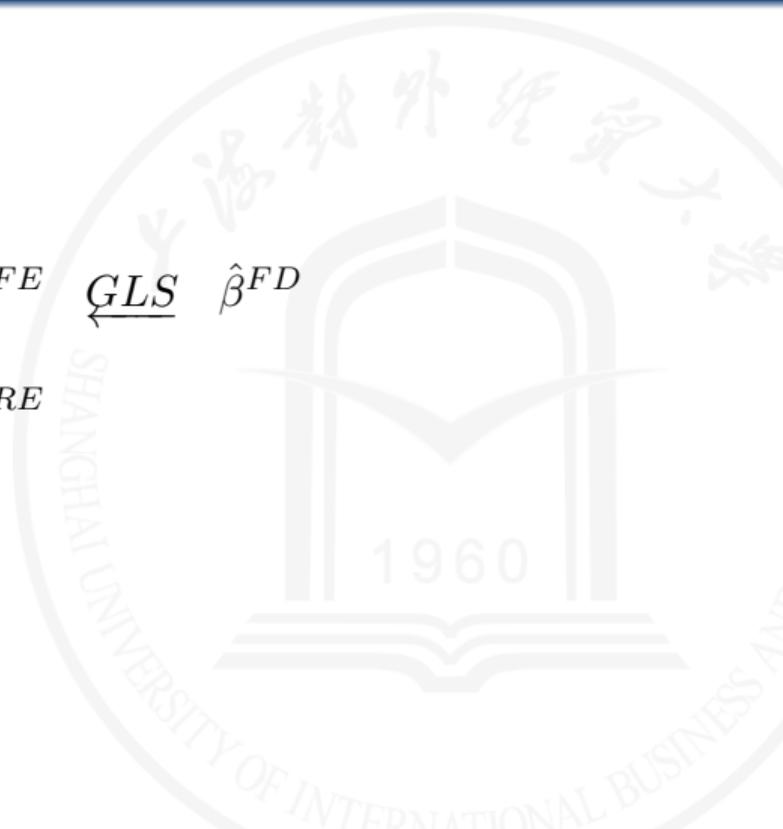
- 只比较了不同个体的均值。
- 固定效应为组内估计量，而POLS、RE为两者的组合。



# 不同估计量之间的关系

$$\begin{array}{r}
 \hat{\beta}^{WG} \\
 \searrow \\
 \hat{\beta}^{POLS} \\
 \nearrow \\
 \hat{\beta}^{BG}
 \end{array}
 = \hat{\beta}^{LSDV} = \hat{\beta}^{FE} \xleftarrow{GLS} \hat{\beta}^{FD}$$

$$\hat{\beta}^{POLS} \xrightarrow{GLS} \hat{\beta}^{RE}$$



# 固定效应v.s.随机效应、混合最小二乘

固定效应估计量与随机估计量的优缺点：

- 从假设强弱来看：
  - 固定效应所需假设更弱，更稳健
  - 随机效应、POLS假设更强：需假设 $E(\alpha_i|x_i) = 0$
- 另一个重要区别：
  - 固定效应不能估计不随时间变化的变量的系数
  - 随机效应、POLS可以



## 面板数据：标准误的问题

线性面板数据的标准误与OLS的标准误一样，同样存在Cluster的问题：

- 至少要Cluster到个体层面
  - xtreg命令加robust选项即可
  - 或者xtreg, cl(id)
- 当然，可以进行更高层次的Cluster
- 特别是使用reg、reghdfe等手动作固定效应时，一定不要忘了加cluster

# 固定效应与随机效应：检验

- 固定效应与随机效应的关键区别： $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$ 是否成立：

	$\mathbb{E}(\alpha_i x_i) = 0$	$\mathbb{E}(\alpha_i x_i) \neq 0$
$\hat{\beta}^{RE}$	一致，最有效	不一致
$\hat{\beta}^{FE}$	一致	一致

- 理论上：如果 $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$ 成立优先使用随机效应。
  - 实际上，如果该检验不显著，随机效应和固定效应的估计应该区别不大
- 检验：Hausman检验
- 实践中：固定效应最稳健，应优先考虑。
- 实践中：xtreg命令、reghdfe命令

