

线性面板数据分析

司继春

2025年5月



面板数据模型

- 在面板数据的分析中，与截面数据不同的是，我们可以允许不同时间、不同个体具有不同的截距项：

$$y_{it} = \alpha_{it} + x'_{it}\beta + u_{it}$$

其中 $i = 1, \dots, N$ 代表个体，而 $t = 1, \dots, T$ 为时间， α_{it} 为个体-时间可变的截距项，如果是平衡面板，那么我们将会有 $N \times T$ 个观测。

- 在面板数据中，个体-时间可变的截距项 α_{it} 是相对截面数据中特别的设定，该截距项允许每个个体、每一期都有不同的截距项。
- 然而，该模型设定太过于一般化：由于 α_{it} 同时随着时间和个体变化，且是不可观测的，如果我们不做任何假定，以上模型将不可被识别。
- 实际上，按照以上的设定，那么 α_{it} 的个数为 $N \times T$ 个，与样本量已经相等，所以无法使用现有样本直接估计出所有的 α_{it} 。

不可观测异质性

- 为了识别以上模型，一个非常常用的假设是假设 α_{it} 可以被分解为可加的两部分：

$$\alpha_{it} = \alpha_i + \lambda_t$$

得到

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda_t + x'_{it}\beta + u_{it}$$

其中 α_i 为不随时间变化（time-invariant）的个体效应（individual effects）或者个体异质性（individual heterogeneity），而 λ_t 则代表了不同时间截距项的不同，也就是时间异质性。

不可观测异质性

- 其中，个体效应 α_i 度量了所有的个体（可观测与不可观测的、影响 y 的）不随时间变化而变化的特征，比如一个人的性别、出生地、出生年份，甚至可能不随时间变化的性格、能力等；或者对于企业而言，企业的成立时间、地理位置、不随时间变化的企业文化等，都可以被包含在 α_i 中。
- 而 λ_t 则度量了同一时间对于所有个体都相同的 y 的冲击
 - 比如宏观经济运行情况变量，可能对于所有企业有共同的影响，比如当GDP存在正向冲击时，所有企业都会受到大环境影响，而 λ_t 建模了这种共同冲击的影响。
 - 当然现实中不同个体对于共同冲击的反应可能是有不同的：交互固定效应

时间固定效应

- 对于 λ_t ，一种处理方法是直接设定 t 的函数形式，比如线性趋势：

$$\lambda_t = \lambda t$$

或者二次趋势：

$$\lambda_t = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2$$

等。

- 然而这些设定都有很强的函数形式假定：对于任意的非线性的、偶发的冲击都无法很好的建模。

时间固定效应

- 由于我们在这里假设短面板数据，面临的是 T 固定但是 $N \rightarrow \infty$ 的情况，因而 λ_t 通常比较容易处理，可以直接通过引入时间固定效应（time fixed effects），即当前观测属于哪一期的虚拟变量来解决。
- 在引入了时间固定效应后，所有的不随个体 i 而变化的变量（比如国家的GDP、利率等）都与 λ_t 共线，从而不能再加入到回归方程中。
- 不失一般性，我们通常将时间固定效应 λ_t 看做是 x_{it} 中的一部分，因而我们可以将模型写为

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

其中现在的 x_{it} 中包含着时间固定效应 λ_t 。

面板的向量形式

- 接下来，在本章中，我们都以

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

为基础进行讨论。

- 为了方便起见，我们通常记

$$X_i = \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ \vdots \\ x'_{iT} \end{bmatrix}_{T \times K}, Y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{iT} \end{bmatrix}_{T \times 1}, U_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} \end{bmatrix}_{T \times 1}$$

从而上式可以写为

$$Y_i = \alpha_i + X_i\beta + U_i$$

由于 T 的固定的，从而以上 X_i, Y_i, U_i 的维数都是固定的。

面板的向量形式

通常，为了获得统计性质，我们会做如下假定：

独立同分布假定

假设 $\{(Y_i, X_i, U_i), i = 1, \dots, N\}$ 是独立同分布的。

- 注意在以上假设中，我们实际上假设的是不同个体之间独立同分布，而没有假定同一个个体 i 的不同期的独立性或者同分布性。
- 实际上，对于同一个个体 i ，如果 $s \neq t$ ， x_{it} 和 x_{is} 、 u_{it} 和 u_{is} 通常都是相关的，从而同一个个体的不同期通常是不独立的。
- 我们假设样本之间是独立同分布的，但是并不假设同一个个体的不同观测之间的独立性或者同分布性。

两种不同的模型

- 虽然对于时间固定效应 λ_t 的处理相对简单，然而，由于 $N \rightarrow \infty$ ，对 α_i 的处理相对困难。
- 注意 α_i 也是一个随机变量，根据对 α_i 的假设不同，通常来讲有两类不同的模型可以使用：
 - 随机效应（random effects）模型
 - 固定效应（fixed effects）模型
- 两者的关键区别在于 α_i 与解释变量 x_{it} 之间相关性假设。在介绍两种方法之前，我们首先介绍使用传统的最小二乘法及其所需要的假设。

两种不同的模型

- 对于面板数据，如果忽略其面板结构，我们可以直接通过OLS进行估计。
- 然而，注意到由于 α_i 不可观测，从而模型可以写为

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it} \triangleq x'_{it}\beta + v_{it}$$

其中 v_{it} 包含所有不可观测的因素，包括误差项 u_{it} 以及个体异质性 α_i 。

- 针对以上的设定，我们首先可以忽略面板结构，将每个个体的每一期都当做是一个独立的个体，从而，我们将 $N \times T$ 个观测视为独立的个体。

外生性假设

根据之前OLS一致性的讨论，为了使得一致性成立，我们需要假设 $\mathbb{E}(v_{it}|x_{it}) = 0$ ，而为了保证 $\mathbb{E}(v_{it}|x_{it}) = 0$ 成立，我们通常将其分解为两个单独的假设：

当期外生性， contemporaneous exogeneity

假设对于所有的 i, t ，有 $\mathbb{E}(u_{it}|x_{it}) = 0$ 。

以及：

个体异质性的外生

假设对于所有的 i ，有 $\mathbb{E}(\alpha_i|X_i) = 0$ 。

外生性假设

- 注意以上仅仅假设了当期的 u_{it} 和当期的 x_{it} 不相关
- 但是由于不可观测的个体异质性 α_i 出现在了每一期的方程中，因而需要 α_i 和所有期的 x_{it} 都不相关，可以简写为 α_i 和 X_i 不相关。
- 由于本章中主要考虑个体异质性 α_i 的问题，因而我们暂且忽略 u_{it} 与 x_{it} 的相关性。
- 当然在实证中，如果 u_{it} 与 x_{it} 相关，那么这种外生性的违背是需要重点考虑的。

POLS

- 注意在这里虽然我们将解释变量 x_{it} 的下角标写成 it ，但是在实际应用时，仍然需要加入那些个体 i 的随时间不变的特征 $\tilde{x}_i$
- 由于在模型中加入了时间固定效应，所以所有的不随个体变化、只随时间变化的变量都可以忽略，然而我们没有加入个体 i 的固定效应，所以那些不随时间变化的个体特征（如性别等）仍然不与其他任何解释变量共线，需要被加入到模型中。
- 否则，这些不随时间变化的个体特征会进入到 α_i 从而误差项 v_{it} 中，使其更容易与 x_{it} 相关，从而外生性更难以满足。

POLS

- 在以上假设条件下，我们可以将 v_{it} 视为新的误差项，此时我们可以简单的使用OLS对其进行估计。
- 若以上假设成立：

$$\mathbb{E}(x_{it}v_{it}) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(x_{it}v_{it}) | x_{it}] = \mathbb{E}[x_{it}\mathbb{E}(\alpha_i + u_{it} | x_{it})] = 0$$

从而 $\mathbb{E}(v_{it}x_{it}) = 0$ ，由此得到矩条件：

$$\mathbb{E}[x_{it}(y_{it} - x'_{it}\beta)] = 0$$

得到

$$\beta = [\mathbb{E}(x_{it}x'_{it})]^{-1} \mathbb{E}(x_{it}y_{it})$$

POLS

- 从而矩估计：

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{\text{POLS}} &= \left[\frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} x'_{it}) \right]^{-1} \left[\frac{1}{NT} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} y_{it}) \right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} x'_{it}) \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} y_{it}) \right] \\ &= \left(\sum_{i=1}^N X'_i X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X'_i Y_i \right)\end{aligned}$$

以上估计方法实际上就是使用OLS直接进行估计，因而也被称为混合最小二乘法（pooled ordinary least squares, POLS）。

POLS

如果记

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}_{NT \times K}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{NT \times 1}$$

那么POLS估计量可以写为:

$$\hat{\beta}^{\text{POLS}} = (X'X)^{-1} X'Y$$

从而获得POLS估计量的一个重要前提是 $(X'X)^{-1}$ 可逆。据此，我们可以引入如下识别条件：

识别条件

假设 $\mathbb{E}(X_i'X_i)$ 可逆。

POLS统计性质

- 如果记 $V_i = \alpha_i + U_i$ ，那么回归式可以写为 $Y_i = X_i\beta + V_i$
- 将其带入到混合最小二乘的估计式中，有：

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{\text{POLS}} &= \left(\sum_{i=1}^N X_i' X_i \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^N X_i' (X_i\beta + V_i) \right] \\ &= \beta + \left(\sum_{i=1}^N X_i' X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' V_i \right) \\ &= \beta + \left(\sum_{i=1}^N X_i' X_i \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} v_{it}) \right]\end{aligned}$$

POLS统计性质

- 从而在外生性假设以及一定可积性条件下，根据大数定律，有：

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (x_{it} v_{it}) \xrightarrow{p} \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T (x_{it} v_{it}) \right) = \sum_{t=1}^T \mathbb{E} (x_{it} v_{it}) = 0$$

进而易得，POLS估计量为一致估计量。

- 进一步，由于

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' X_i \xrightarrow{p} \mathbb{E} (X_i' X_i) \\ \sqrt{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' V_i \overset{a}{\sim} \mathcal{N} (0, \mathbb{V} (X_i' V_i)) \end{cases}$$

而其中 $\mathbb{V} (X_i' V_i) = \mathbb{E} (X_i' V_i V_i' X_i)$ ，从而

$$\sqrt{N} (\hat{\beta}^{\text{POLS}} - \beta) \overset{a}{\sim} \mathcal{N} \left(0, [\mathbb{E} (X_i' X_i)]^{-1} \mathbb{E} (X_i' V_i V_i' X_i) [\mathbb{E} (X_i' X_i)]^{-1} \right)$$

POLS的标准误

- 为了估计混合最小二乘估计量的标准误，类比异方差稳健标准误的计算方法。
- 记 $\hat{V}_i = Y_i - X_i \hat{\beta}^{\text{POLS}}$ 为个体 i 的残差向量，那么使用插入法：

$$\mathbb{V}(\widehat{\beta}^{\text{POLS}}) = (X'X)^{-1} \left[\sum_{i=1}^N (X_i' \hat{V}_i \hat{V}_i' X_i) \right] (X'X)^{-1}$$

以上就得到了POLS估计系数的标准误的一致估计。注意其中：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (X_i' \hat{V}_i \hat{V}_i' X_i) &= \sum_{i=1}^N \left(\begin{bmatrix} x_{i1} & \cdots & x_{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{i1} \\ \vdots \\ \hat{v}_{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_{i1} & \cdots & \hat{v}_{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{i1} \\ \vdots \\ x'_{iT} \end{bmatrix} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T (\hat{v}_{it} \hat{v}_{is} x_{it} x'_{is}) \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\hat{v}_{it}^2 x_{it} x'_{it}) + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \sum_{s=1, s \neq t}^T (\hat{v}_{it} \hat{v}_{is} x_{it} x'_{is}) \end{aligned}$$

- 聚类标准误：至少聚类到个体 i 层面

POLS实例

俄罗斯大选

在之前的例子中，我们展示了Enikolopov, Petrova和Zhuravskaya（2011）的截面数据分析结果，除此之外文章中还使用了如下的面板数据设定：

$$\text{vote}_{st} = \beta_0 + \beta_1 \text{NTV}_{st} + x'_{st}\beta + \lambda_t + \alpha_i + \epsilon_{st}$$

其中 $t = 1995, 1999$ ，即一个两年的面板数据， s 为选区， x_{st} 为其他控制变量。如果使用POLS对以上模型进行回归，那么可以使用如下代码：

POLS实例

俄罗斯大选

```

1 use datasets/NTV_Aggregate_Data_resshaped.dta
2 // 年1995并没有成立NTV
3 gen Watch_probit_p=0
4 replace Watch_probit_p=Watch_probit if year==1999
5 // 回归POLS
6 reg Votes_SPS_ Watch_probit_p i.region i.year if year!=2003,
   cluster(tik_id)
7 // reghdfe
8 reghefe Votes_SPS_ Watch_probit_p if year!=2003, a(i.region i.year
   ) cluster(tik_id)
    
```

随机效应模型

- 虽然我们可以使用混合最小二乘得到估计，但是由于 α_i 的存在，误差项 V_i 的协方差矩阵不会是一个同方差、无自相关的理想情况
- 而这种理想情况是BLUE所需要的，这也就意味着有效性的缺失。
- 为了达到有效性，我们可以使用误差项 V_i 的协方差结构进行广义最小二乘（generalized least squares, GLS）。

随机效应的假设

协方差结构和外生性假设

假设：

1. α_i 具有同方差，即 $\mathbb{V}(\alpha_i|X_i) = \sigma_\alpha^2$
2. u_{it} 具有同方差且无自相关，即假设 $\mathbb{V}(U_i|X_i) = \sigma_u^2 \cdot I_T$ 。
3. $\mathbb{E}(\alpha_i u_{it}|X_i) = 0$

随机效应模型的协方差结构

- 在这里，我们将 α_i 视为一个均值独立于 x_i 的随机变量，因而我们通常将该设定成为随机效应（random effects）模型。
- 根据以上假设，我们可以计算：

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{V}(V_i|X_i) = \mathbb{V}(\alpha_i + U_i|X_i) \\ &= \sigma_u^2 I_T + \sigma_\alpha^2 \iota_T \iota_T' \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \cdots & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix} \quad (1)\end{aligned}$$

因为有了 α_i 的存在， $\mathbb{C}(v_{it}, v_{is}) \neq 0$ ，从而存在了自相关

随机效应模型的估计

- 此外，有：

$$\mathbb{V}(V_i^*) = \mathbb{V}(\Omega^{-1/2}V_i) = \Omega^{-1/2}\Omega\Omega^{-1/2} = I$$

因而我们可以直接使用 Y_i^* 对 X_i^* 做OLS，得到：

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{\text{RE}} &= \hat{\beta}^{\text{GLS}} = \left(\sum_{i=1}^N X_i^{*'} X_i^* \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i^{*'} Y_i^* \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} Y_i \right) \\ &= [X' (I_N \otimes \Omega^{-1}) X]^{-1} [X' (I_N \otimes \Omega^{-1}) Y]\end{aligned}$$

即随机效应估计量（random effects estimator）。

随机效应的假设

- 值得注意的是，虽然在当期外生性的条件下，混合最小二乘是一致的，但是这并不代表随机效应估计量一定一致。
- 注意到

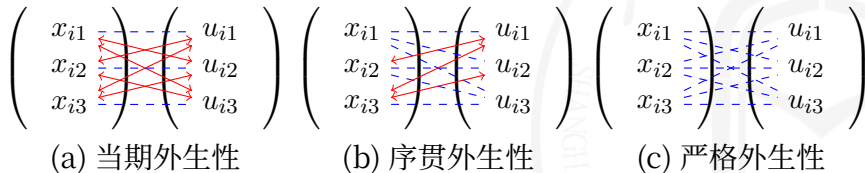
$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{\text{GLS}} &= \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} (X_i \beta + V_i) \right] \\ &= \beta + \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} V_i \right)\end{aligned}$$

其中

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} V_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} V_i)$$

- 然而，如果 Ω 不是对角矩阵（从而 Ω^{-1} 也不是对角阵），在 $X_i' \Omega^{-1} V_i$ 中就必然存在着 $x_{is} u_{it}, s \neq t$
- 而当期外生性假设仅仅要求当期不相关，即 $\mathbb{E}(x_{it} u_{it}) = 0$ ，而没有对 $\mathbb{E}(x_{is} u_{it})$ 做任何假定
- 因而如果仅仅假设当期不相关，可能会存在着不同期的 x 和 u 之间的相关性，此时 $\mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} V_i) = 0$ 可能不成立。

随机效应的假设



序贯外生性

- 比当期外生性更加严格一点的是序贯外生性:

序贯外生性, sequential exogeneity

假设对于所有的 i, t , 有 $\mathbb{E}(u_{it}|x_{it}, x_{i,t-1}, \dots, x_{i1}) = 0$ 。

- 上图(b)展示了序贯外生性。在当期外生性的基础上，序贯外生性不仅要求当期的 u_{it} 与 x_{it} 不相关，而且还额外要求 u_{it} 和过去的所有 x_{it} ($x_{it}, x_{i,t-1}, \dots, x_{i1}$) 都不相关。
- 注意此时我们允许 u_{it} 和未来的 x ($x_{i,t+1}, \dots, x_{iT}$) 相关。
- 此时，看起来好像 x_{it} 是由滞后的误差项 ($u_{i,t-1}, \dots, u_{i1}$) 所“决定”的，我们称这些 x 为前定变量 (predetermined variables)。

严格外生性

- 然而以上序贯外生性还是无法保证 $\mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} V_i) = 0$ 成立，实际上为了保证该条件成立，我们需要更严格的外生性，即：

严格外生性, strict exogeneity

假设对于所有的 i, t ，有 $\mathbb{E}(u_{it}|X_i) = 0$ 。

- 上图(c)展示了严格外生性，即需要假设所有期的 x 和所有期的 u 都不相关，这是一个最严格的外生性假设。
- 在严格外生性的条件下，我们可以得到 $\mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} V_i) = 0$ 成立，从而GLS估计量或者随机效应估计量 $\hat{\beta}^{\text{GLS}}$ 是 β 的一致估计。

严格外生性

- 以上使用了条件期望定义严格外生性，实际上在这里我们只需要一个稍微弱一点的假设：

严格外生性2

假设

$$\mathbb{E}(u_i \otimes X_i) = \mathbb{E} \begin{bmatrix} u_{i1} X_i \\ \vdots \\ u_{iT} X_i \end{bmatrix}_{T^2 \times K} = \mathbb{E} \begin{bmatrix} u_{i1} x'_{i1} \\ \vdots \\ u_{i1} x'_{iT} \\ \vdots \\ u_{iT} x'_{i1} \\ \vdots \\ u_{iT} x'_{iT} \end{bmatrix} = 0$$

POLS v.s. RE

经常会看到，即使面板数据，文献中使用随机效应模型的也越来越少，与POLS相比，其在假设上有一点细微差别：

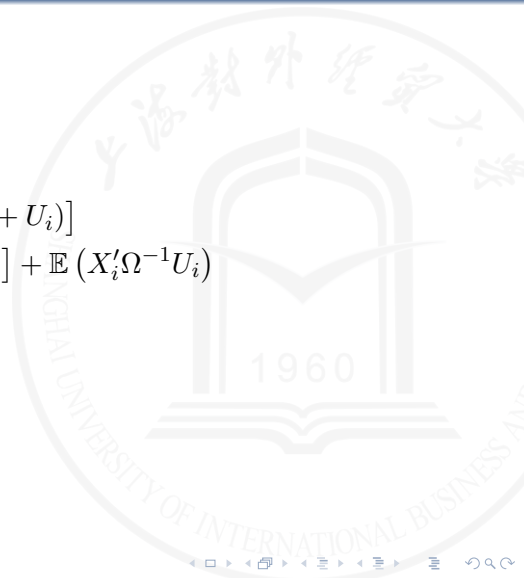
- 对 α_i 的假设上：两者都需要假设 $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$
- 对 u_{it} 的假设上：
 - POLS只需要假设 $\mathbb{E}(u_{it}|x_{it}, \alpha_i) = 0$ （当期外生性， contemporaneous exogeneity）
 - RE需要假设 $\mathbb{E}(u_{it}|X_i, \alpha_i) = 0, X_i = [x'_{i1}, \dots, x'_{iT}]'$ （严格外生性， strict exogeneity）

随机效应的大样本性质

在严格外生性的条件下，可以计算

$$\begin{aligned}\mathbb{E} (X_i' \Omega^{-1} V_i) &= \mathbb{E} [X_i' \Omega^{-1} (\alpha_i + U_i)] \\ &= \mathbb{E} [X_i' \Omega^{-1} \alpha_i] + \mathbb{E} (X_i' \Omega^{-1} U_i) \\ &= 0\end{aligned}$$

从而 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} V_i \xrightarrow{p} 0$ ，进而 $\hat{\beta}^{\text{GLS}} \xrightarrow{p} \beta$ 。



随机效应的大样本性质

对于极限分布，注意到

$$\sqrt{N} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} V_i \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X_i' \Omega^{-1} V_i))$$

而根据假设式(1)的协方差结构，有

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X_i' \Omega^{-1} V_i) &= \mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} V_i V_i' \Omega^{-1} X_i) \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} V_i V_i' \Omega^{-1} X_i | X_i)] \\ &= \mathbb{E}[X_i' \Omega^{-1} \mathbb{E}(V_i V_i' | X_i) \Omega^{-1} X_i] \\ &= \mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} \Omega \Omega^{-1} X_i) \\ &= \mathbb{E}(X_i' \Omega^{-1} X_i) \end{aligned}$$

随机效应的大样本性质

从而

$$\begin{aligned}\sqrt{N} \left(\hat{\beta}^{\text{GLS}} - \beta \right) &= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} V_i \right) \\ &= [\mathbb{E} (X_i' \Omega^{-1} X_i)]^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N X_i' \Omega^{-1} V_i \right) + o_p(1) \\ &\stackrel{a}{\sim} \mathcal{N} \left(0, [\mathbb{E} (X_i' \Omega^{-1} X_i)]^{-1} \right)\end{aligned}$$

实际上可以证明，以上的估计量是为有效估计量，自然其渐近方差小于POLS的渐近方差（习题）。

标准误的问题

- 渐进分布：

$$\sqrt{N} \left(\hat{\beta}^{\text{GLS}} - \beta \right) \overset{a}{\sim} \mathcal{N} \left(0, \left[\mathbb{E} \left(X_i' \Omega^{-1} X_i \right) \right]^{-1} \right)$$

仍然依赖于式(1)的协方差结构假设。

- 实践中：仍然推荐使用聚类稳健标准误，至少聚类到个体层面。
 - 聚类标准误的计算（习题）

可行的广义最小二乘

- 然而，由于我们并不知道 Ω ，以上广义最小二乘法是不可行的。为了使得以上估计量变得可行，我们需要对 Ω 进行估计。
- 注意到， Ω 是由 σ_α^2 以及 σ_u^2 唯一确定的，因而我们可以通过估计 σ_α^2 和 σ_u^2 对 Ω 进行估计：

① 首先计算POLS，并计算残差：

$$\hat{v}_{it} = y_{it} - x'_{it}\hat{\beta}^{\text{POLS}}$$

② 使用

$$\begin{cases} \hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_u^2 = \frac{1}{NT-K} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \hat{v}_{it}^2 \\ \hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{1}{N \frac{T(T-1)}{2} - K} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^T \hat{v}_{it} \hat{v}_{is} \end{cases}$$

解出 $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 和 $\hat{\sigma}_u^2$

可行的广义最小二乘

将 $\hat{\sigma}_\alpha^2$ 和 $\hat{\sigma}_u^2$ 带入 Ω 中，得到 Ω 的估计：

$$\hat{\Omega} = \hat{\sigma}_u^2 I_T + \hat{\sigma}_\alpha^2 \iota_T \iota_T' = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_u^2 & \hat{\sigma}_\alpha^2 & \cdots & \hat{\sigma}_\alpha^2 \\ \hat{\sigma}_\alpha^2 & \hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_u^2 & \cdots & \hat{\sigma}_\alpha^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_\alpha^2 & \hat{\sigma}_\alpha^2 & \cdots & \hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_u^2 \end{bmatrix}$$

将其带入到GLS中，我们就得到了可行的GLS（feasible GLS）：

$$\hat{\beta}^{\text{FGLS}} = \left(\sum_{i=1}^N X_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' \hat{\Omega}^{-1} Y_i \right)$$

以上即可行的随机效应估计量。

随机效应实例

俄罗斯大选

在俄罗斯大选的例子中，如果需要使用随机效应估计量，可以使用：

```
1 | xtreg Votes_SPS_ Watch_probit_p i.region i.year if year!=2003, re
   | cluster(tik_id)
```

其中xtreg命令为面板数据回归命令，而re选项则指定使用随机效应模型进行估计，此外，标准误被聚类到个体层次。

- 在xtreg命令中，robust选项与cluster(panel_id)是等价的，由于该例该面板本身为选区层面面板，此时使用cluster(tik_id)与直接加入robust选项是等价的。
- 但是在其他命令如reg、reghdfe等并没有这一设定，仍然需要手动使用cluster()进行聚类。

相关随机效应模型

- 前述混合最小二乘以及随机效应模型都需要假设个体异质性与 x_i 之间不相关，即在假设： $\mathbb{E}(\alpha_i|X_i) = 0$ 条件下得到的。
- 然而， α_i 作为不随时间变化的、不可观测的个体特征，中间可能包含着很多混淆因素与解释变量相关（Mundlak, 1978），这一假设很多时候难以成立。
- 为了处理这一问题，一个简单的方法是直接建模个体异质性与 X_i 之间的相关性，然后使用随机效应（或者POLS）进行估计，这种方法被称为相关随机效应（correlated random effects）模型。

相关随机效应模型

- Mundlak (1978) 建议做如下假设:

$$\alpha_i = \bar{x}_i' \pi + a_i$$

其中 $\bar{x}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it}$ 为解释变量的跨时间平均。

- 将其带入到面板设定中, 有

$$y_{it} = x_{it}' \beta + \bar{x}_i' \pi + a_i + u_{it}$$

如果我们可以假设 $E(a_i | X_i) = 0$, 配合 u_{it} 的严格外生性等条件, 使用POLS或者GLS进行随机效应估计都可以一致地估计 β 。

一阶差分方法

- 为了处理可能的 α_i 与 X_i 之间的相关性，一个更加聪明的办法是想办法在回归方程中将 α_i 消掉，从而可以完全无需对 α_i 和 X_i 之间的关系进行建模。
- 将 α_i 消掉最简单的做法是直接对回归方程式

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

进行一阶差分（first difference），从而得到

$$\Delta y_{it} = \Delta x'_{it}\beta + \Delta u_{it}$$

其中 $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1}$ 为一阶差分，其他类似。

- 由于 α_i 是不随时间变化而变化的，所以经过一阶差分之后，自然消掉了 α_i ，从而也就无需考虑 α_i 与 x_{it} 之间的相关性。
- 当然，解释变量中不随时间变化的所有特征也被一阶差分所消掉，所以使用该方法时， x_{it} 中将不能包含不随时间而变化的解释变量（也不包含常数项）。

一阶差分方法

- 为了使得以上方程可以通过OLS直接估计，需要假定：

$$\mathbb{E}(\Delta u_{it} \Delta x_{it}) = \mathbb{E}[(u_{it} - u_{i,t-1})(x_{it} - x_{i,t-1})] = 0$$

- 因而序贯外生性等假设并不足以保证OLS估计量的一致性，至少需要假设相邻两期的 u_{it} 与 x_{it} 之间不相关才可以，当然，严格外生性足以保证，是更强的假设。

LSDV

- 然而，注意到如果将 α_i 视为虚拟变量， x_i 为 K 维随时间变化的随机向量（而不包含常数项），那么我们将有 $N + K$ 个系数需要估计，观测数总共有 $N \times T$ 个
- 一般而言 $N \times T > N + K$ ，因而估计是可以进行的。
- 然而此时，自变量的维数随着样本量的增加而线性增加，一般而言是无法获得一致估计量的。在统计学中，这个问题通常被称为**伴随参数问题（incidental parameters problem）**。
- 不过幸运的是，在简单的线性模型中，以上LSDV估计量的确可以得到 β 的一致估计。我们可以使用分步回归证明这一点。

LSDV

- 注意到回归方程式中将 α_i 视为个体固定效应：

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$$

如果使用最小二乘回归，等价于：

- ① 使用将 x_{it} 对 N 个虚拟变量 $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ 做回归，得到残差。根据之前的结论，该残差为 $\ddot{x}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i$ 其中 $\bar{x}_i$ 为第 i 个个体的所有时间段的 x 的平均值： $\bar{x}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{it}$ 以上过程即每个观测减去个体的平均，也成为去平均（demean）；
- ② 使用 y_{it} 对 N 个虚拟变量 $\alpha_i, i = 1, \dots, N$ 做回归，得到残差。根据之前的结论，该残差为： $\ddot{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ 即被解释变量去平均；
- ③ 使用OLS进行估计：

$$\hat{\beta}^{\text{LSDV}} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it} \ddot{x}'_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it} \ddot{y}_{it} \right)$$

固定效应

- 实际上，以上估计量也可以由如下步骤得到：

1. 对于回归方程式 $y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + u_{it}$ 按照时间进行平均，得到：

$$\bar{y}_i = \alpha_i + \bar{x}'_i\beta + \bar{u}_i$$

2. 相减，得到：

$$y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)' \beta + (u_{it} - \bar{u}_i)$$

从而减去了个体异质性 α_i

3. 使用 $\ddot{y}_{it} = y_{it} - \bar{y}_i$ 对 $\ddot{x}_{it} = x_{it} - \bar{x}_i$ 做回归，得到估计量：

$$\hat{\beta}^{FE} = \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it} \ddot{x}'_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{x}_{it} \ddot{y}_{it} \right)$$

- 传统上，在定义以上估计量时，通常将 α_i 视为固定的、不随机的参数，因而也被成为固定效应（fixed effects）模型。

固定效应统计性质

- 记 $M_0^T = I - \frac{1}{T} \iota_T \iota_T'$, 那么:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^{\text{FE}} &= \left(\sum_{i=1}^N \ddot{X}_i' \ddot{X}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \ddot{X}_i' \ddot{Y}_i \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^N X_i' M_0^T X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' M_0^T Y_i \right) \\ &= \beta + \left(\sum_{i=1}^N X_i' M_0^T X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^N X_i' M_0^T U_i \right)\end{aligned}$$

- 由于 M_0^T 不是对角阵, 因而此时, 我们需要严格外生性此时, 有:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i' M_0^T U_i \xrightarrow{p} \mathbb{E} (X_i' M_0^T U_i) = 0$$

从而一致性满足

固定效应的应用

俄国选举与NTV

在上面俄国选举的例子中，作者还额外使用1995年的选举结果进行了比对，其模型设定如下：

$$\text{vote}_{st} = \beta_0 + \beta_1 \text{NTV}_{st} + \delta_t + \alpha_s + \epsilon_{st}$$

由于以上只有两期，实际上以上做法与一阶差分是等价的。

(linear_panel_fe_ntv.do)

可用的variation

- 组内估计量：估计

$$\dot{y}_{it} = \dot{x}'_{it}\beta + \dot{u}_{it}$$

得到 $\hat{\beta}^{\text{WG}}$

- 等价于LSDV，因而只包含了同一个体不同时间的比较。

- 组间估计量：估计

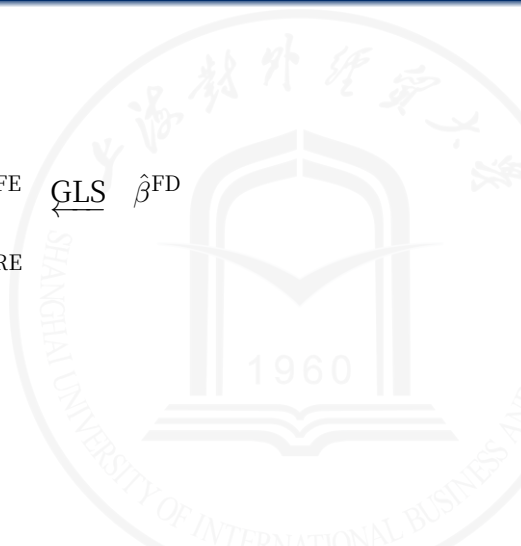
$$\bar{y}_i = \bar{x}'_i\beta + \bar{u}_i$$

得到 $\hat{\beta}^{\text{BG}}$

- 只比较了不同个体的均值。
- 固定效应为组内估计量，而POLS、RE为两者的组合。

不同估计量之间的关系

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{\beta}^{\text{WG}} & = & \hat{\beta}^{\text{LSDV}} & = & \hat{\beta}^{\text{FE}} & \xleftarrow{\text{GLS}} & \hat{\beta}^{\text{FD}} \\
 & & \searrow & & & & \\
 & & \hat{\beta}^{\text{POLS}} & \xrightarrow{\text{GLS}} & \hat{\beta}^{\text{RE}} & & \\
 \hat{\beta}^{\text{BG}} & & \nearrow & & & &
 \end{array}$$



固定效应v.s.随机效应、混合最小二乘

固定效应估计量与随机估计量的优缺点：

- 从假设强弱来看：
 - 固定效应所需假设更弱，更稳健
 - 随机效应、POLS假设更强：需假设 $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$
- 另一个重要区别：
 - 固定效应不能估计不随时间变化的变量的系数
 - 随机效应、POLS可以



面板数据：标准误的问题

线性面板数据的标准误与OLS的标准误一样，同样存在Cluster的问题：

- 至少要Cluster到个体层面
 - xtreg命令加robust选项即可
 - 或者xtreg, cl(id)
- 当然，可以进行更高层次的Cluster
- 特别是使用reg、reghdfe等手动作固定效应时，一定不要忘了加cluster

固定效应与随机效应：检验

- 固定效应与随机效应的关键区别： $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$ 是否成立：

	$\mathbb{E}(\alpha_i x_i) = 0$	$\mathbb{E}(\alpha_i x_i) \neq 0$
$\hat{\beta}^{\text{RE}}$	一致，最有效	不一致
$\hat{\beta}^{\text{FE}}$	一致	一致

- 理论上：如果 $\mathbb{E}(\alpha_i|x_i) = 0$ 成立优先使用随机效应。
 - 实际上，如果该检验不显著，随机效应和固定效应的估计应该区别不大
- 检验：Hausman检验
- 实践中：固定效应最稳健，应优先考虑。
- 实践中：xtreg命令、reghdfe命令