工具变量

慧航

上海对外经贸大学

2025年6月

工具变量

不管是遗漏变量、反响因果、度量误差还是自选择问题，都会导致核心解释变量与误差项的相关性，即在回归方程：

$$y_i = \gamma \times w_i + \tilde{x}_i'\delta + u_i$$

中w_i与误差项u_i之间相关。比如：

- 如果w_i为国家的GDP，y_i为一个国家内战爆发的次数
- 如果w_i为孩子的数量，y_i为孩子的教育经费（quantity-quality tradeoff）

解决方案：找到外生的影响w_i但是不会直接影响y_i的变量，即**工具变量（instrument variable）**z_i，比如：

- 内战例子中，可以使用天气作为国家GDP的工具变量
- 生育问题中，计划生育政策作为孩子数量的工具变量

工具变量的识别

如果我们要估计的结构方程（structural equation）为：

$$y_i = \alpha + \gamma w_i + u_i$$

然而$\mathbb{C}(w_i, u_i) \neq 0$，但是我们可以找到一个$z_i$，使得$\mathbb{C}(z_i, u_i) = 0$，且：

$$w_i = \eta + \phi z_i + v_i$$

我们把以上方程带入结构式，得到：

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha + \gamma(\eta + \phi z_i + v_i) + u_i \\ &= (\alpha + \gamma\eta) + \gamma\phi z_i + u_i + \gamma v_i \end{aligned}$$

我们称上式为简约式（reduced form）。

工具变量的识别

现在两个式子：

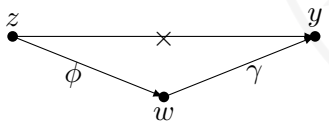
$$w_i = \eta + \phi z_i + v_i$$

以及

$$\begin{aligned} y_i &= (\alpha + \gamma\eta) + \gamma\phi z_i + u_i + \gamma v_i \\ &\triangleq \alpha^* + \gamma^* z_i + e_i \end{aligned}$$

都不存在内生性问题，因而我们可以一致估计$\eta, \phi, \alpha^*, \gamma^*$。进而，可以得到Wald估计量：

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\gamma}^*}{\hat{\phi}} \xrightarrow{p} \frac{\gamma^*}{\phi} = \frac{\gamma\phi}{\phi} = \gamma$$



工具变量的识别假设

识别假设：

- 工具变量z_i与u_i不相关
  - 暗含z_i不直接影响y_i，即z_i不是y_i的直接原因，否则z_i会进入到u_i中
  - 此外，z_i也与u_i中的遗漏变量、度量误差等因素均不相关
- 分母$\phi = \frac{\mathbb{C}(z_i, w_i)}{\mathbb{V}(z_i)} \neq 0$（工具变量与内生变量**高度**相关）。
  - 不相关：**欠识别**（**underidentification**）
  - 相关性弱：**弱工具**（**weak instrument**）

工具变量

- 工具变量可以不止一个
- 如果估计方程：

$$y_i = \gamma w_i + \tilde{x}_i'\delta + u_i$$

其中w_i为关心的内生变量，即$\mathbb{C}(w_i, u_i) \neq 0$，但是存在（可以为多个）工具变量$\tilde{z}$，使得：

  - $\mathbb{E}(u_i|\tilde{z}) = 0$
  - 且$\mathbb{E}(w_i|\tilde{x}_i, \tilde{z}) \neq \mathbb{E}(w_i|\tilde{x}_i)$

- 那么w_i的简约式可以写为：

$$w_i = \tilde{z}_i'\phi + \tilde{x}_i'\xi + v_i$$

可以通过工具变量达到对γ的识别。

工具变量的一般形式

- 工具变量可以不止一个
- 如果估计方程：

$$y_i = \gamma w_i + \tilde{x}_i'\delta + u_i \triangleq x_i'\beta + u_i$$

其中w_i为关心的内生变量，即$\mathbb{C}(w_i, u_i) \neq 0$，但是存在（可以为多个）工具变量$\tilde{z}_i$，使得：

  - $\mathbb{E}(u_i|\tilde{x}_i, \tilde{z}) = 0$
  - 且$\mathbb{E}(w_i|\tilde{x}_i, \tilde{z}) \neq \mathbb{E}(w_i|\tilde{x}_i)$

- 那么w_i的简约式可以写为：

$$w_i = \tilde{z}_i'\phi + \tilde{x}_i'\xi + v_i \triangleq z_i'\psi + v_i$$

可以通过工具变量达到对γ的识别。

两阶段最小二乘

估计：两阶段最小二乘法（two-stage least squares, 2SLS）

1. **第一阶段回归（fisrt stage）**，对w_i的简约式进行回归：

$$w_i = \tilde{z}'\phi + \tilde{x}_i'\xi + v_i$$
$$\hat{w}_i = \tilde{z}'\hat{\phi} + \tilde{x}_i'\hat{\xi}$$

   从而$\hat{w}_i$与u_i无关

2. 第二阶段回归，用$\hat{w}_i$代替w_i：

$$y_i = \hat{\gamma}\hat{w}_i + \tilde{x}_i'\hat{\xi} + \hat{\epsilon}_i$$

注意：**不要**手动算两阶段最小二乘，差别：在算标准误的时候用$\hat{\epsilon}_i$还是$\hat{u}_i = y_i - \hat{\gamma}w_i + \tilde{x}_i'\hat{\xi}$?

2SLS示例

降水与内战

经济条件（如经济增长）可能会影响一个国家爆发内战的可能性，然而经济条件与内战之间的关系可能存在着互为因果：经济差的时候更容易发生内战，但同时内战也会对经济增长带来负面影响。为了估计经济条件对内战的影响，Miguel, Satyanath和Sergenti （2004）使用降水作为经济增长的工具变量，研究了经济条件与内战爆发之间的关系。作者使用了撒哈拉以南的非洲国家作为样本，由于这些国家很多都是农业国家，因而其GDP很容易受到降水的影响。其估计的结构方程为

$$conflict_{it} = \beta_0 + \gamma \cdot growth_{it} + X_{it}'\delta + \alpha_i + \tau_t + \delta_i \cdot t + u_{it}$$

其中$conflict_{it}$为国家i在t年是否发生内战，$growth_{it}$为经济增长，X_{it}为其他控制变量，α_i为国家固定效应，τ_t为年份固定效应，在文章的设定中，作者加入了个体的时间趋势，即允许每个国家具有不同的时间固定效应系数。（CivilConflict.do）

多个内生变量

- 内生变量也可以不止一个
- 如果估计方程：

$$y_i = w_i'\gamma + \tilde{x}_i'\delta + u_i \triangleq x_i'\beta + u_i$$

此时需要工具变量z_i的个数大于等于内生变量w_i的个数（order condition），同样$\mathbb{E}(u_i|z_i) = 0$且$\mathbb{E}(w_i|\tilde{x}_i, \tilde{z}_i) \neq \mathbb{E}(w_i|\tilde{x}_i)$

- w_i的简约式：

$$\begin{aligned} w_{1i} &= \tilde{z}_i'\phi_1 + \tilde{x}_i'\xi_1 + v_{1i} \\ &\vdots \\ w_{Gi} &= \tilde{z}_i'\phi_G + \tilde{x}_i'\xi_G + v_{Gi} \end{aligned} \tag{1}$$

注意：**每个内生变量的第一阶段方程使用的外生变量是一样的！**

多个内生变量：Order Condition

- 如果工具变量个数小于内生变量个数，则不能识别

Order Condition

如果结构方程为

$$y_i = \alpha + \gamma_1 w_{1i} + \gamma_2 w_{2i} + u_i$$

第一阶段方程：

$$w_{1i} = \eta_1 + \phi_1 \tilde{z}_i + v_{1i}$$
$$w_{2i} = \eta_2 + \phi_2 \tilde{z}_i + v_{2i}$$

带入得到简约式：

$$\begin{aligned} y_i &= (\alpha + \gamma_1\eta_1 + \gamma_2\eta_2) + (\gamma_1\phi_1 + \gamma_2\phi_2)\,\tilde{z}_i + u_i + \gamma_1 v_{1i} + \gamma_2 v_{2i} \\ &= \alpha^* + \gamma^* \tilde{z}_i + e_i \end{aligned}$$

多个内生变量：Order Condition

Order Condition

仿照前叙的识别方法：

$$\frac{\gamma^*}{\phi_1} = \gamma_1 + \gamma_2 \frac{\phi_2}{\phi_1}$$
$$\frac{\gamma^*}{\phi_2} = \gamma_2 + \gamma_1 \frac{\phi_1}{\phi_2}$$

联立以上两个方程，其中γ^*, ϕ_1, ϕ_2可以被一致估计，现在需要解出γ_1, γ_2。然而将上面两个式子稍微整理，都可以被整理为

$$\gamma_1 \phi_1 + \gamma_2 \phi_2 = \gamma^*$$

从而两个未知数只有一个方程，方程有无穷多组解，不可识别。

工具变量的一般设定

- 记

$$z_i = \begin{bmatrix} \tilde{z}_i \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix}_{L\times 1}, x_i = \begin{bmatrix} w_i \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix}_{K\times 1}, \beta = \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}_{K\times 1}$$

- 此外，记$\dim(w_i) = G, \dim(\tilde{x}_i) = M, \dim(\tilde{z}_i) = H$，从而$H + M = L, G + M = K$。
- Order condition 要求$L \geq K$，即$H \geq G$，否则无法识别。
- Rank condition：对于第一阶段回归式(1)，

$$\operatorname{rank}(\Phi) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \phi_1' \\ \vdots \\ \phi_G' \end{bmatrix}\right) = G$$

  - order condition是rank condition成立的必要条件

估计：2SLS

估计：只要$\text{rank}(\Phi) = G$，不管$H > G$或者$H = G$，都可以使用2SLS

1. 第一阶段回归，对w_i的简约式进行回归：

$$\hat{w}_{1i} = \tilde{z}_i'\hat{\phi}_1 + \tilde{x}_i'\hat{\xi}_1$$
$$\vdots$$
$$\hat{w}_{Gi} = \tilde{z}_i'\hat{\phi}_G + \tilde{x}_i'\hat{\xi}_G$$

记$\hat{w}_i = \begin{bmatrix} \hat{w}_{1i} & \cdots & \hat{w}_{Gi} \end{bmatrix}'$

2. 第二阶段回归，用$\hat{w}_i$代替w_i：

$$y_i = \hat{w}_i'\hat{\gamma} + \tilde{x}_i'\hat{\xi} + \hat{\epsilon}_i$$

同样：**不要**手动算两阶段最小二乘

2SLS示例

降水与内战

在内战的例子中，作者还加入了滞后的经济增长率作为额外的内生变量：

$$conflict_{it} = \beta_0 + \gamma_0 \cdot growth_{it} + \gamma_1 \cdot growth_{i,t-1} + X'_{it}\delta + \alpha_i + \tau_t + \delta_i \cdot t + u_{it}$$

此时，有两个内生变量，需要为两个内生变量至少找两个工具变量，一个自然的选择是使用降水的滞后项作为经济增长的滞后项的工具变量。此外，原文中还引入了其他降水的数据来源，共4个工具变量：

2SLS示例

降水与内战

```
// 内生变量：增长率GDP 、增长率之后；工具变量：降水增长率gdp_gGDPgdp_g_l 、降水增长率滞后GPCP_g GPCP_g_l // 第一阶段
reg gdp_g GPCP_g GPCP_g_l i.ccode i.year i.ccode#c.year
reg gdp_g_l GPCP_g GPCP_g_l i.ccode i.year i.ccode#c.year
// 两阶段最小二乘，三种命令
ivregress 2sls any_prio (gdp_g gdp_g_l = GPCP_g GPCP_g_l ) i.ccode i.year i.ccode#c.year, cl(ccode)
ivreghdfe any_prio (gdp_g gdp_g_l = GPCP_g GPCP_g_l ), absorb(i.ccode i.year i.ccode#c.year) cl(ccode)
ivreg2  any_prio (gdp_g gdp_g_l = GPCP_g GPCP_g_l ) i.ccode i.year i.ccode#c.year, cl(ccode)
// 两阶段最小二乘，多余的四个()工具变量
ivreghdfe any_prio (gdp_g gdp_g_l = GPCP_g GPCP_g_l NCEP_g NCEP_g_l), absorb(i.ccode i.year i.ccode#c.year) cl(ccode)
```

GMM估计

- 两阶段最小二乘即在特定矩条件下的广义矩估计（GMM）
- 矩条件为：$\mathbb{E}(z_i u_i) = 0, z_i = \begin{bmatrix} \tilde{z}' & \tilde{x}_i' \end{bmatrix}', x_i = \begin{bmatrix} w_i & \tilde{x}_i' \end{bmatrix}', \beta = \begin{bmatrix} \gamma & \delta' \end{bmatrix}'$，且$\dim(z_i) = L, \dim(x_i) = K$，则GMM目标函数：

$$\min \left[\sum_i z_i \left(y_i - x_i' \beta \right) \right]' \mathcal{W} \left[\sum_i z_i \left(y_i - x_i' \beta \right) \right]$$

- 如果取$\mathcal{W} = Z'Z$，其中

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}_{N \times L}$$

则得到了两阶段最小二乘（2SLS）。

- 在同方差假定下，以上的权重矩阵为最优权重矩阵。
- **当同方差假定不满足时，以上的权重矩阵不是最优权重矩阵**。可以使用twostep、igmm等计算最优权重矩阵。

过度识别检验

- 可以证明，**当使用最优权重矩阵**

$$\mathcal{W}^* = \left[\sum_i \left(u_i^2 z_i z_i'\right)\right]^{-1}$$

时，GMM目标函数渐进服从χ^2分布，自由度为$L-K$：

$$\left[\sum_i z_i \left(y_i - x_i'\beta\right)\right]' \mathcal{W}^* \left[\sum_i z_i \left(y_i - x_i'\beta\right)\right] \overset{a}{\sim} \chi^2 (L-K)$$

  - Hansen’s J-statistics
  - 显著好还是不显著好?
- Sargan test：首先得到残差，再使用残差对所有外生变量做回归，使用F检验对除常数项外的所有外省变量系数均为0的原假设做检验。

工具变量

工具变量的两个假定:

1. 与误差项不相关——Hansen’s test
2. 与内生变量高度相关

如果第二项假定不满足?

欠识别检验

- 对于第一阶段：

$$w_i = \tilde{z}_i'\phi + \tilde{x}_i'\xi + v_i$$

- 我们要求工具变量至少要和内生变量相关，如果不相关：**欠识别（underidentification）**
- 检验：
  - 原假设：$H_0 : \phi = 0$ 使用F检验——**第一阶段F值**
  - 多个内生变量时，还需要rank condition：

$$\text{rank}\,(\Phi) = G$$

  - Stata：Kleibergen and Paap rk Wald F

弱工具

以上得知，对于要估计的方程：

$$y_i = \alpha + \gamma w_i + u_i$$

以及第一阶段：

$$w_i = \eta + \phi z_i + v_i$$

Wald估计可以写为：

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\mathbb{C}(y_i, z_i)}{\mathbb{C}(w_i, z_i)}$$

如果分母趋向于0，IV估计的结果会非常不稳定，并偏向OLS估计量——弱工具。

工具变量

- Angrist and Krueger (1991)研究教育回报时，使用了出生季节与州、年份的乘积作为上学时间的工具变量
- Bound, Jaeger and Baker (1996)对此研究做出了批评，发现随机生成一组出生季节仍然能得到相似的结论。
- 工具变量太多导致估计结果偏向OLS的估计结果

工具变量

- 对于少量弱工具：
  - 诊断弱工具
  - 使用LIML，并调整置信区间。
- 对于Many instruments：
  - 2SLS表现非常差
  - 使用LIML，或者REQML(Chamberlain and Imbense, 2004)
  - 使用Lasso对第一阶段工具进行挑选

弱工具诊断

弱工具诊断:

- 第一阶段F值，一般在一个内生变量一个工具变量的情况下，为了使得2SLS估计量偏差不大于10%，F要大于10
- Cragg-Donald 统计量（$F-value$推广，当只有一个内生变量时就是$F-value$）
- Stock and Yogo (2002)提出了针对Cragg-Donald 统计量的临界值

置信区间调整:

- Anderson and Rubin (1949)
- Lee等人（2022）：根据第一阶段F值进行调整
- Valid t-ratio inference, Lee et al.(2022)

tF标准误

- 诊断与置信区间调整方法的结合
- Stock and Yogo (2005)的诊断方法可以理解为：

$$P\left\{t^2 > c^*, F > F^*\right\} \leq \alpha$$

其中F为第一阶段的F值。以上步骤即首先判断第一阶段F值是否大于某个临界值，进而使用传统的t检验

- Lee等人（2022）：

$$P\left\{t^2 > c_\alpha\left(F\right)\right\} \leq \alpha$$

即根据第一阶段F值调整t统计量的临界值

  - 缺点：目前只支持一个内生变量、一个工具变量

tF标准误

Panel A. Selected values of tF critical values, $\sqrt{c_{0.05}(F)}$, and tF standard error adjustments, $\sqrt{c_{0.05}(F)}/1.96$

F	4.000	4.008	4.015	4.023	4.031	4.040	4.049	4.059	4.068	4.079
$\sqrt{c_{0.05}(F)}$	18.656	18.236	17.826	17.425	17.033	16.649	16.275	15.909	15.551	15.201
$\sqrt{c_{0.05}(F)}/1.96$	9.519	9.305	9.095	8.891	8.691	8.495	8.304	8.117	7.934	7.756
	4.090	4.101	4.113	4.125	4.138	4.151	4.166	4.180	4.196	4.212
	14.859	14.524	14.197	13.878	13.566	13.260	12.962	12.670	12.385	12.107
	7.581	7.411	7.244	7.081	6.922	6.766	6.614	6.465	6.319	6.177
	4.229	4.247	4.265	4.285	4.305	4.326	4.349	4.372	4.396	4.422
	11.834	11.568	11.308	11.053	10.804	10.561	10.324	10.091	9.864	9.642
	6.038	5.902	5.770	5.640	5.513	5.389	5.268	5.149	5.033	4.920
	4.449	4.477	4.507	4.538	4.570	4.604	4.640	4.678	4.717	4.759
	9.425	9.213	9.006	8.803	8.605	8.412	8.222	8.037	7.856	7.680
	4.809	4.701	4.595	4.492	4.391	4.292	4.195	4.101	4.009	3.919
	4.803	4.849	4.897	4.948	5.002	5.059	5.119	5.182	5.248	5.319
	7.507	7.338	7.173	7.011	6.854	6.699	6.549	6.401	6.257	6.117
	3.830	3.744	3.660	3.578	3.497	3.418	3.341	3.266	3.193	3.121
	5.393	5.472	5.556	5.644	5.738	5.838	5.944	6.056	6.176	6.304
	5.979	5.844	5.713	5.584	5.459	5.336	5.216	5.098	4.984	4.872
	3.051	2.982	2.915	2.849	2.785	2.723	2.661	2.602	2.543	2.486
	6.440	6.585	6.741	6.907	7.085	7.276	7.482	7.702	7.940	8.196
	4.762	4.655	4.550	4.448	4.348	4.250	4.154	4.061	3.969	3.880
	2.430	2.375	2.322	2.270	2.218	2.169	2.120	2.072	2.025	1.980
	8.473	8.773	9.098	9.451	9.835	10.253	10.711	11.214	11.766	12.374
	3.793	3.707	3.624	3.542	3.463	3.385	3.309	3.234	3.161	3.090
	1.935	1.892	1.849	1.808	1.767	1.727	1.688	1.650	1.613	1.577
	13.048	13.796	14.631	15.566	16.618	17.810	19.167	20.721	22.516	24.605
	3.021	2.953	2.886	2.821	2.758	2.696	2.635	2.576	2.518	2.461
	1.542	1.507	1.473	1.440	1.407	1.376	1.345	1.315	1.285	1.256
	27.058	29.967	33.457	37.699	42.930	49.495	57.902	68.930	83.823	104.67
	2.406	2.352	2.299	2.247	2.197	2.147	2.099	2.052	2.006	1.96
	1.228	1.200	1.173	1.147	1.121	1.096	1.071	1.047	1.024	1.00

tF标准误

- 或者可以使用软件包：
  - net install tf, force from(http://www.princeton.edu/~davidlee/wp/)
  - 需要首先安装ivreg2、ranktest
  - 用法与ivreg2一致